

MS-C1420 Fourier-analyysi
Tentti 3.9.2014

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

1. Olkoon s (esim. jatkuva ja) jaksollinen funktio jaksolla 1 ja määrittele luvut a_n ja b_n , $n \in \mathbb{Z}$, kaavoilla

$$a_n = 2 \int_0^1 \cos(2\pi nt) s(t) dt,$$
$$b_n = 2 \int_0^1 \sin(2\pi nt) s(t) dt.$$

Esitä Fourier-kertoimet $\hat{s}(n)$ lukujen a_n ja b_n avulla ja päinvastoin.

2. Funktion s Fourier-muunnos on

$$\hat{s}(\nu) = \begin{cases} e^{-\nu} \cdot \frac{1}{1+\nu}, & \nu \geq 0, \\ 0, & \nu < 0. \end{cases}$$

Onko s jatkuva? Onko $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$? Onko $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$? Perustele (ei todistuksia äläkä laske $s(t)$).

3. Signaalin $\mathbf{s}(j)$, $j = 0, 1, \dots, N$ diskreetti Fourier-muunnos määritellään kaavalla $\hat{\mathbf{s}}(m) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi mj/N} \mathbf{s}(j)$. Johda kaava, jolla luvut $\mathbf{s}(j)$ voidaan esittää lukujen $\hat{\mathbf{s}}(m)$ avulla.

4. Signaalista $s(t) = \cos(2\pi 7t)$ otetaan näytteitä $\mathbf{q}(j) = s(j \cdot 0.3)$, $j = 0, 1, \dots, 2999$ ja lasketaan tämän jonon Fourier-muunnos. Suunnilleen millä indeksin j , $0 \leq j \leq 2999$, arvoilla luvut $|\hat{\mathbf{q}}(j)|$ ovat suurimmillaan?

5. Signaali $s(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$ määrittää vaimennetun distribuution. Mikä on tämän vaimennetun distribuution Fourier-muunnos? Perustele!