Aalto-yliopisto

MS-C1420 Fourier-analyysi
Harjoitus 4
29–31.1.2014, viikko 5

Gripenberg, Ruponen, Saari

Palauta P-tehtävät viimeistään 3.2.2014 kl. 14
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Olkoon $N > 1$ ja

$$p_N(t) = \max\{0, 1 - N|t|\}, \quad |t| \le \frac{1}{2},$$
$$p_N(t+1) = p_N(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Määritä tämän funktion Fourier-kertoimet käyttämällä hyväksi tietoa, että funktion $p(t) = \max\{0, 1 - |t|\}$ Fourier-muunnos on $\hat{p}(\nu) = \text{sinc}\,(\nu)^2 = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$
ja että $p_N(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(N(t-j))$.

Vastaus: $\frac{1}{N}\text{sinc}\left(\frac{k}{N}\right)^2$.

P2. Osoita, että jos $t \in \mathbb{R}$ ja

$$h(\nu) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t\nu}, \quad \nu \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$h(\nu + 1) = h(\nu), \quad \nu \in \mathbb{R},$$

niin tämän jaksollisen funktion Fourier-kertoimet ovat

$$\hat{h}(k) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)} & \text{jos } t \ne k, \\ 1 & \text{jos } t = k. \end{cases}$$

P3. Osoita, että jos $s \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \ge \frac{1}{2}$ ja

$$g(\nu) = \overline{\hat{s}(\nu)}, \quad \nu \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right),$$
$$g(\nu + 1) = g(\nu), \quad s \in \mathbb{R},$$

niin

$$\overline{\hat{g}(k)} = s(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

P4. Osoita, että jos $s \in L^1(\mathbb{R})$ ja $\hat{s}(\nu) = 0$ kun $|\nu| \ge \frac{1}{2}$ niin

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)\frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}.$$

Huom! *Tämä on eräs versio ns. Whittaker-Shannonin kaavasta.*
Vihje: Käytä tehtävien P2 ja P3 tuloksia ja muista, että koska Fourier-muunnos on isometria: $L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *niin* $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(\nu)\overline{g}(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k)\overline{\hat{g}(k)}$.

P5. Seuraava esimerkki osoittaa etteivät oletukset, että $s \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|s(t+k)| < \infty$ kaikilla t ja että $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{s}(k)| < \infty$ riitä takaamaan että Poissonin summakaava $\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)$ olisi voimassa.

(a) Määritellään

$$h_j(t) = \max\bigl\{\min\{1, jt, j(1-t)\}, 0\bigr\}.$$

Piirrä funktioden h_2 ja h_{20} kuvaajat.

(b) Olkoon

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{jos } t < 0, \\ h_{j+1}(t-j) - h_j(t-j), & \text{jos } t \in [j, j+1), j \geq 0. \end{cases}$$

Laske $g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s(t+j)$.

(c) Koska funktiot h_j ovat jatkuvia ja 0 välin $(0,1)$ ulkopuolella niin myös s on jatkuva, mutta laske $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|\,\mathrm{d}t$.

(d) Laske $\hat{s}(k)$ kun $k \in \mathbb{Z}$ käyttäen hyväksi funktioden $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kt}$ jaksollisuutta ja (b)-kohdan tulosta.

(e) Laske $\sum_{k\in\mathbb{Z}} s(k)$ ja $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{s}(k)$.

Vastaa Stack-tehtäviin (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=16`)
viimeistään 3.2.2014 kl. 14.00
