Aalto-yliopisto

MS-A0502 Todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen peruskurssi Gripenberg, Kiiski
Harjoitus 5
24–28.11.2014, viikko 48

Vastaa Stack-tehtäviin (stack3.aalto.fi/course/view.php?id=30)
viimeistään 1.12.2014 kl. 12.00.

Palauta P-tehtävät viimeistään 1.12.2014 kl. 12.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Alla olevassa taulukossa on annettu joidenkin mittausasemien vedenkorkeuden kuukausikeskiarvot marraskuussa 1996 ja 2000:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1996	78	77	159	110	192	157	95	93	143	42
2000	85	89	161	97	205	185	123	80	161	78

Onko näissä arvoissa merkitsevää eroa? Testaa merkitsevyystasolla 5%.
Vihje: Voit olettaa että mittausarvot jokaisella mittausasemalla ja joka kuukausi ovat normaalijakautuneita samalla varianssilla (tosin aika kyseenalainen oletus) mutta et voi olettaa, että odotusarvot eri mittausasemilla olisivat samat josta seuraa, ettei ole järkevää verrata vuosien 1996 ja 2000 eri asemien keskiarvojen keskiarvoja toisiinsa. Sen sijaan voi olla hyvä idea ensin laskea näiden vuosien mittaustulosten erotus joka asemalla. Mikä on nollahypoteesi?

P2. $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-jakautuneesta satunnaismuuttujasta on saatu otos $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$. Nyt menetellään seuraavalla (väärällä) tavalla: Lasketaan havaintoarvoista aritmeettinen keskiarvo $\overline{x}$, jos $\overline{x} > 0$ niin nollahypoteesiksi valitaan $\mathrm{H}_0 : \mu \leq 0$ ja muissa tapauksissa valitaan nollahypoteesiksi $\mathrm{H}_0 : \mu \geq 0$, (ja virhe tehdään siinä, että nollahypoteesi riippuu havaintoarvoista). Sitten testataan nollahypoteesin paikkansapitävyyttä normaaliin tapaan merkitsevyystasolla 0.01 ja lasketaan otsosvarianssi s^2 ja testimuuttujan arvo $w = \frac{\overline{x}-0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$. Mikä on todennäköisyys, että nollahypoteesi hylätään jos todella pätee $\mu = 0$? Mikä on tämä todennäköisyys jos otoksen koko on n ja merkitsevyystaso on α?
Vihje: Määritä luku A siten, että nollahypoteesi hylätään jos $w > A$ (eli (A, ∞) sisältyy hylkäysalueeseen) tai $w < -A$ (eli $(-\infty, A)$ sisältyy hylkäysalueeseen) ja ota huomioon mikä nollahypoteesi on jos $w > 0$ jolloin myös $\overline{x} > 0$ ja vastaavasti mikä se on kun $w < 0$ jolloin $\overline{x} < 0$. Laske sitten todennäköisyys, että testimuuttuja on itseisarvoltaan suurempi kuin A jos $\mu = 0$.

P3. Heität tavanomaista noppaa 150 kertaa ja saat n_k kertaa tulokseksi k alla olevan taulukon mukaisesti:

Silmäluku	1	2	3	4	5	6
n_k	35	15	16	35	31	18

Onko noppa virheetön, eli ovatko kaikki silmäluvut yhtä todennäköisiä? Testaa χ^2-testillä merkitsevyystasolla 0.01.

P4. Erään tuotteen valmistaja väittää, että heidän tuotteistaan korkeintaan 5% on viallisia. Asiakas testaa tuote-erän poimimalla otoksen, jonka koko on 400, ja testaa nollahypoteesinsä 1% merkitsevyystasolla. Mikä tämä nollahypoteesi on? Laske todennäkäisyys, että ostaja ei hylkää nollahypoteesiaan, eikä siten tätä tuote-erää, jos todellisuudessa todennäköisyys, että tuote on viallinen onkin 0.07? Käytä normaaliapproksimaatiota kuten ostajakin.

Vihje: Menettele esim. seuraavalla: Laske ensin luku A siten että ostaja hylkää nollahypoteesinsä jos erässä on vähintään A viallista tuotetta (eli oletat, että ostaja laskee binomijakautuneella satunnasimuuttujalla etkä Bernoulli-jakatuneiden satunnasimuuttujien keskiarvolla. Laske sitten todennäköisyys, että erässä on vähemmän kuin A viallista tuotetta jos todennäköisyys, että tuote on viallinen in 0.07. Oleta (tietenkin) että tapahtumat "tuote on viallinen" ovat riippumattomia.

Vastaus: 0.65

P5. Oletetaan, että $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Mikä on todennäköisyys, että nollahypoteesi $H_0 : \sigma^2 \geq 4$ hylätään merkitsevyystasolla 0.05 jos todellisuudessa $\sigma^2 = 2.5$ ja nollahypoteesia testataan otoksella, jonka koko on 40.

Vihje: Voit menetellä esim. seuraavalla tavalla: Määritä luku A siten, että nollahypoteesi hylätään jos havaittu otosvarianssi $s^2 < A$ (kun $n = 40$). Laske sitten todennäköisyys, että otosvarianssi $S^2 < A$ jos $X \sim \mathrm{N}(\mu, 2.5)$. Muista mitä normaalijakauman tapauksessa tiedetään otosvarianssin jakaumasta!

Vastaus: 0.62