Aalto-universitetet

MS-A0409 Grundkurs i diskret matematik — Gripenberg
Övning 5
Vecka 41, 6.10–10.10.2014
Teori för dessa uppgifter finns också i Biggs: 20, 21

Returnera lösningarna till I-uppgifterna senast 13.10.2014 kl. 10.30
Kom ihåg att skriva ditt namn och studentnummer!

I1. Funktionen $\alpha : \{0,1,\ldots,15\} \to \{0,1,2\ldots,15\}$ som definierats med $\alpha(x) = \operatorname{mod}(3 \cdot x, 16)$ är en bijektion (eftersom $\operatorname{sgd}(3,16) = 1$). Bestäm denhär funktionens banor (dvs. mängderna $\{\,\alpha^j(x) : j \geq 0\,\}$ då $x \in \{0,1,\ldots,15\}$ och $\alpha^j = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{j}$) och skriv α som en produkt av cykler (dvs. uttryck i stil med $(a\ b\ c)$ där $\alpha(a) = b$, $\alpha(b) = c$ och $\alpha(c) = a$).

I2. Den symmetriska gruppen S_3 består av alla permutationer av mängden $\{1,2,3\}$.

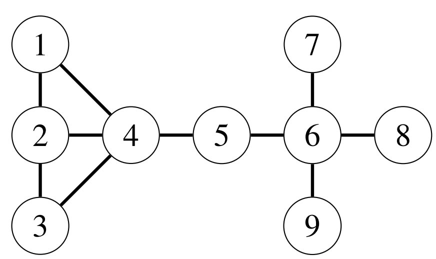
(a) Visa att $H = \{(1),(1\ \ 2)\}$ (där cykelnotation använts) är en delgrupp av S_3, dvs. att produkterna av elementen i H hör till H.

(b) Bestäm de vänstra sidoklasserna aH, $a \in S_3$, till H.

(c) Bestäm med hjälp av resultaten i punkt (b) element a, b, c och $d \in S_3$ så att $aH = bH$ och $cH = dH$ men $acH \neq bdH$ (vilket betyder att man inte kan definiera en operation $\diamond$ på de vänstra sidoklasserna med $(xH) \diamond (yH) = xyH$.)

Obs! *Om du skulle räkna ut de högra sidoklasserna Ha, $a \in S_3$ så skulle du märka att de inte är desamma som de vänstra sidoklasserna!*

I3. Bestäm gruppen G som består av alla permutationer f av noderna i grafen X



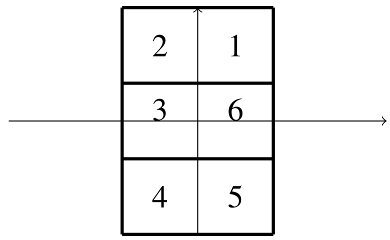
så att att finns det en båge mellan $f(a)$ och $f(b)$ om det finns en båge mellan a och b (dvs. alla isomorfismer av grafen).

Bestäm också cykelindexet $\zeta_{G,X} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\zeta_{g,X}$ där $\zeta_{g,X}(t_1,\ldots,t_n) = t_1^{j_1} \cdot t_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot t_n^{j_n}$ där j_k är antalet banor med längden k när den cykliska gruppen genererad av g verkar på X.

Ledning: Använd det faktum att i fall som detta måste en nod a avbildas på en nod $f(a)$ som har lika många grannar som a.

Svar: $\zeta_{G,X}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{12}\left(t_1^9 + 4t_1^7t_2 + 3t_1^5t_2^2 + 2t_1^6t_3 + 2t_1^4t_2t_3\right)$

I4. Låt X be a vara ett bräde med 2×3 kvadrater, sidorna parallella med koordinataxlarna och mittpunkten i origo.



Som symmetriavbildningar har rotationer runt mittpunkten med vinkeln 0 eller π och reflektioner i x-axeln och y-axeln. Om vi numrerar kvadraterna med $1, 2, 3, 4, 5, 6$ i positiv rikning så motsvarar dessa avbildningar permutationerna (1), $(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, $(1\ 5)(2\ 4)$ och $(1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$. Dehär permutationerna bildar en grupp G (men detta behöver du inte kontrollera). Bestäm cykelindexet $\zeta_{G,X}$ och använd det för att bestämma på hur många sätt brädets kvadrater kan "färgas" med 4 "färger".

Svar: 1120

I5. Hur många olika sorts halsband kan man göra av 4 vita och 4 svarta pärlor. När du bestämmer vilka halsband som är lika och vilka som är olika så skall du beakta både rotationer och reflektioner, dvs., symmetrigruppen är den dihedrala gruppen. Kom ihåg att cykelindexet för den dihedrala gruppen D_n av rotationer och reflektioner av ett regelbundet polygon med n hörn är

$$\zeta_{D_n,\mathbb{N}_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{1}{2n} \sum_{d\,|\,n} \varphi(d) t_d^{\frac{n}{d}} + \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t_2^{\frac{n}{2}} + t_1^2 t_2^{\frac{n}{2}-1}\right), & \text{ifall } n \text{ är jämn,} \\ \frac{1}{2} t_1 t_2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ifall } n \text{ är udda,} \end{cases}$$

där $\varphi(d)$ är antalet heltal j mellan 0 och $d-1$ så att $[j]_d$ har en invers i $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dvs. sgd $(j, d) = 1$.

Svar: 8

Besvara Stack-uppgifterna (`stack3.aalto.fi/course/view.php?id=15`)
senast 13.10.2014 kl. 10.30
