MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)
Yhteenveto, osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

21. tammikuuta 2016

Usean muuttujan vai vektorimuuttujan funktiot

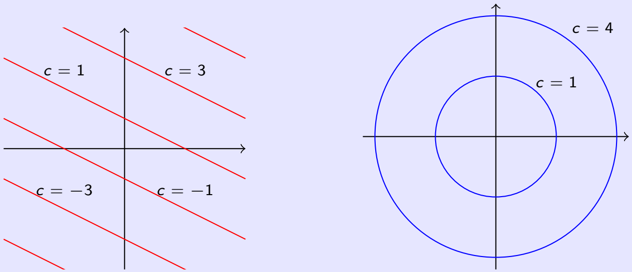
- *Funktio* $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *on "sääntö" tai "yhteys" (usein mutta ei suinkaan välttämättä, kaava) joka* **jokaiseen** *määrittelyjoukon* D *alkioon* $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ *liittää* **yksikäsitteisen** *"arvon"* $f(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}$.
- *Funktion* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *arvot ovat vektoreita ja vektorin* $\mathbf{f}$ *jokainen komponentti on funktio:* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *eli*

$$\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_d) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_d) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_d) \end{bmatrix}$$

- *Usein voi olla hyödyllistä, että sen sijaan että käsittelemme funktiota* $f(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ *usean muuttujan funktiona käsittelemmen sitä yhden* **vektori***muuttujan* $\mathbf{x}$ *funktiona* $f(\mathbf{x})$ *missä vektorilla* $\mathbf{x}$ *on* d *komponenttia.*
- *Useimmiten otamme funktion argumentit pystyvektorina jolloin funktion derivaatta eli gradientti (kun funktio on reaaliarvoinen) on vaakavektori.*

Tasa-arvokäyrät

Jos $f(x,y)$ on kahden muuttujan reaaliarvoinen funktio ja $c \in \mathbb{R}$ niin joukko $\{\,(x,y) : f(x,y) = c\,\}$ on usein käyrä (tai sitten käyrien unioni) eli funktion **tasa-arvokäyrä**. *Kuvio, jossa on piirrettynä monta tällaista tasa-arvokäyrää antaa tietynlaista informaatiota funktiosta.*
Funktion $f(x,y) = x + 2y$ tasa-arvokäyrät ovat suoria kun taas funktion $g(x,y) = x^2 + y^2$ tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä:



Kolmen muuttujan tapauksessa saadaan vastaavasti **tasa-arvopintoja**.

Raja-arvo, määritelmä I

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ *jos* $|f(x,y)-L|$ *on "pieni" aina kun* $\|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ *on "riittävän pieni" ja* $(x,y)\neq(x_0,y_0)$.

Raja-arvo, määritelmä II

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ *jos* $|f(\mathbf{x})-L|$ *on "pieni" kun* $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|$ *on "riittävän pieni" ja* $\mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0$.

Vektorin pituus

Vektorin $\mathbf{x}$ *pituus, kun sen komponentit ovat* $x_1, x_2, \ldots, x_d$, *on tässä* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_d^2}$ *mutta raja-arvot eivät riipu siitä miten vektorin "pituus" on määritelty kunhan sillä on normaalit "pituuden" ominaisuudet.*

Raja-arvo, määritelmä III

$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0\\ x\in\Omega}} f(\mathbf{x}) = L$ *jos jokaisella* $\epsilon>0$ *on olemassa* $\delta>0$ *siten, että jos* $0<\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|<\delta$ *ja* $\mathbf{x}\in\Omega$ *niin pätee* $|f(\mathbf{x})-L|<\epsilon$.

Raja-arvo, ominaisuudet

Jos $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$ *ja* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ *niin pätee*

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \big(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})\big) = \alpha F + \beta G,$
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = FG,$
- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{F}{G}$ *jos* $G \neq 0.$

Tästä seuraa, että raja-arvot, joiden määrittäminen on hankalaa ja näin ollen vaativat eniten työtä, ovat ne, joissa sijotus antaa tulokseksi $\frac{0}{0}$.

Raja-arvo, kuristusperiaate

- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$ *ja* $|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ *(kun* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$*) niin* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0.$
- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L$ *ja* $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$ *(kun* $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$*) niin* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$

Raja-arvo säteitä pitkin

Jos f on yhden reaalimuuttujan funktio niin sillä on raja-arvo pisteessä t_0 jos ja vain jos oikean- ja vasemmanpuoliset raja-arvot ovat samat. Useamman muuttujan tapauksessa tilanne on osittain toinen:

- *Jos raja-arvo* $\lim_{t\to 0+} f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t)$ **ei** *ole riippumaton parametrien α ja β arvoista niin raja-arvo* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ **ei** *ole olemassa.*
- *Jos* $\lim_{t\to 0+} f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t) = L$ *kaikilla α ja β joilla $\alpha^2+\beta^2>0$ niin tästä seuraa ainoastaan, että*
  jos *raja-arvo on olemassa niin se on L.*

Epäyhtälöitä ym.

- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = F$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ *ja* $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$ *kun* $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}_0$ *niin pätee* $F \le G$.
- *Jos* $\lim_{x\to x_0} f(x) = F$ *niin pätee* $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x) = F$.
- *Jos* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = G$ *ja* $g(\mathbf{x}) \ne G$ *kun* $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}_0$ *niin pätee*
  $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f\big(g(\mathbf{x})\big) = \lim_{t\to G} f(t)$.

Jatkuvat funktiot

- *Funktio* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *on* **jatkuva pisteessä** $\mathbf{x}_0$ *jos* $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *ja*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

  eli Ω *on* $\mathbb{R}^d$*:n osajoukko,* $\mathbf{x}_0$ *kuuluu joukkoon* Ω*,* $f(\mathbf{x}_0)$ *on määritelty, raja-arvo on olemassa ja se on* $f(\mathbf{x}_0)$*.*

- *Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *on* **jatkuva joukossa** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ *jos*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) \quad \textit{kaikilla} \quad \mathbf{x}_0 \in \Omega.$$

  eli jos se on jatkuva joukon Ω *jokaisessa pisteessä.*

Jatkuvat vektoriarvoiset funktiot

Funktio $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *on jatkuva pisteessä* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$*, (joukossa* Ω*), jos jokainen komponentti on jatkuva pisteessä* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$*, (joukossa* Ω*).*

Jatkuvien funktioiden summa, tulo ja osamäärä

Jos f ja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia joukossa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ niin

- $\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x})$ *ja* $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ *ovat jatkuvia joukossa* Ω,
- $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ *on jatkuva joukossa* $\{\, \mathbf{x} \in \Omega : g(\mathbf{x}) \neq 0 \,\}$.

Jatkuvien funktioiden yhdistetty funktio on jatkuva

Jos $g : \Omega_g \to \Omega_f$ ja $f : \Omega_f \to \mathbb{R}^m$, missä $\Omega_g \subseteq \mathbb{R}^d$ ja $\Omega_f \subseteq \mathbb{R}^p$, ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan niin funktio $(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ on jatkuva joukossa Ω_g.

Huom!

Jos funktio $f(x, y)$ on jatkuva (esim. $\mathbb{R}^2$:ssa) niin funktio $x \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla parametrin y arvoilla ja funktio $y \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla parametrin x arvoilla.
Mutta jos ainoastaan oletamme, että funktio $x \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla y ja funktio $y \mapsto f(x, y)$ on jatkuva kaikilla x niin tästä **ei** *välttämättä seuraa, että funktio $(x, y) \mapsto f(x, y)$ olisi jatkuva.*

Osittaisderivaatat

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
$$f_y(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

Erilaisia merkintätapoja

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = f_1 = D_1 f = D^{(1,0)} f \ldots$$
$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = D^{(1,1)} f.$$

Derivoimisjärjestyksen vaihto

Jos f_x, f_y, f_{xy} ja f_{yx} ovat olemassa ja jatkuvia niin pätee

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Derivaatta

Funktio $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *on derivoituva pisteessä* $\mathbf{x}$ *jos on olemassa (rivi)vektori, joka merkitään* $f'(\mathbf{x})$*:llä siten, että*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Tässä $f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ *on* $1 \times d$*-rivivektorin* $f'(\mathbf{x})$ *ja* $d \times 1$*-sarakevektorin* $\mathbf{h}$ *matriisitulo, ja se voidaan myös esittää pistetulon muodossa* $f'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$ *jos ei haluta tehdä eroa rivi- ja pystyvektorien välillä.*
Muita usein käytettyjä derivaatan merkintöjä ovat $\nabla f(\mathbf{x})$ *ja* $\mathrm{D}f(\mathbf{x})$*.*

Derivaatta ja osittaisderivaatat

Jos funktiolla $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *on jatkuvat osittaisderivaatat niin* f *on derivoituva ja*

$$f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \mathrm{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_d}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

"Jatkuvasti derivoituva" $\Leftrightarrow$ *"Derivoituva ja derivaatta on jatkuva"*

Vektoriarvoisen funktion derivaatta

Funktio $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *on derivoituva pisteessä* $\mathbf{x}$ *jos jokainen komponentti on derivoituva pisteessä* $\mathbf{x}$*, eli on olemassa* $m \times d$ *matriisi* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *siten, että*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Matriisin $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ *rivivektorit ovat vektorin* $\mathbf{f}$ *komponenttien derivaatat ja* $\mathbf{f}'(\mathbf{x})(i,j) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$*. (Tätä matriisia kutsutaan usein Jacobin matriisiksi.)*

Ketjusääntö

Jos $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ *missä* $\mathbf{f}$ *ja* $\mathbf{g}$ *ovat derivoituvia niin pätee*

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}).$$

Huomaa, että tässä oletetaan, että $\mathbf{x}$, $\mathbf{g}$ *ja* $\mathbf{f}$ *ovat sarakevektoreita (mahdollisesti vain yhdellä komponentilla) ja on tärkeätä että ketjusääntö kirjoitetaan järjestyksessä* $\mathbf{f}'(\mathbf{g})\mathbf{g}'$ *koska jos* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ *ja* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ *niin* $\mathbf{f}'$ *on* $m \times p$*-matriisi ja* $\mathbf{g}'$ *on* $p \times d$*-matriisi jolloin matriisitulo* $\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ *on hyvin määritelty.*

Suunnattu derivaatta

Funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$ suuntaan $\mathbf{u}$ on funktion $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u})$ derivaatta pisteessä 0 ja on näin ollen

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u}\frac{1}{\|\mathbf{u}\|} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \left(\tfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right),$$

ja se kertoo miten nopeasti funktio f kasvaa tai vähenee kun kuljetaan pisteestä $\mathbf{x}$ suuntaan $\mathbf{u}$.
Huomaa, että $D_{\mathbf{i}}f(x,y,z) = f_x(x,y,z)$, $D_{\mathbf{j}}f(x,y,z) = f_y(x,y,z)$ ja $D_{\mathbf{k}}f(x,y,z) = f_z(x,y,z)$, eli osittaisderivaatat ovat suunnatut derivaatat koordinaattiakselien (positiivisiin) suuntiin.

Mihin suuntaan osoittaa gradientti?

Suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ pisteessä $\mathbf{x}$ on suurimmillaan kun $\mathbf{u} \upuparrows Df(\mathbf{x})$ (ja pienin vastakkaiseen suuntaan) joten **funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan**.
Suunnattu derivaatta on 0 kun $\mathbf{u} \perp Df(\mathbf{x})$ joten **gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyriä (tai -pintoja) kohti.**

Lineaarinen approksimointi

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})\mathbf{h} = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h},$$

tai toisella tavalla esitettynä

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \\ \approx f_x(x,y,z)\Delta x + f_y(x,y,z)\Delta y + f_z(x,y,z)\Delta z. \end{aligned}$$

Tangenttitaso

Koska gradientti on kohtisuorassa tasa-arvopintoja kohti niin pinnan $f(x,y,z) = c$ *normaali pisteessä* (x_0, y_0, z_0) *on*

$$f'(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\mathbf{k},$$

ja pinnan tangenttitasolla pisteessä (x_0, y_0, z_0) *on yhtälö*

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

Lineaarinen approksimointi ja suhteelliset virheet, erikoistapaus

Jos

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

niin lineaarisella approksimoinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{f} &= \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &\approx \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + \alpha_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\Delta x_n}{x_n},\end{aligned}$$

ja erityisesti

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| \lesssim |\alpha_1| \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + |\alpha_2| \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \ldots + |\alpha_n| \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right|.$$

Newtonin menetelmä: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = ?$

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *niin pätee*

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\Delta\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{x} \approx -\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

ja jotta $\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}$ *valitsemme*

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Käänteismatriisin $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}$ *laskeminen ei ole välttämätöntä mutta meidän pitää ratkaista yhtälösysteemi* $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$.

Milloin Newtonin menetelmä suppenee?

Jos $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *on jatkuvasti derivoituvia,* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_*)$ *on kääntyvä matriisi ja jos* $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_*\|$ *on riittävän pieni (mille voi antaa riittävä ehto) niin pätee* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_*$, *mutta muuten ei ole takeita siitä, että menetelmä konvergoi ja vaikeus on löytää sopiva alkuarvo (ja tietää milloin pitää luovuttaa jos näyttää siltä ettei menetelmä konvergoikaan).*

Newtonin menetelmä

Jos haluamme käyttää Newtonin mentelmää yhtälösysteemin $x^2+4y^2=4$, $x^2-2x=y-1$ *ratkaisemiseksi niin kirjoitamme ensin systeemin muodossa* $\mathbf{f}(\mathbf{X})=\mathbf{0}$, *missä siis*

$$\mathbf{f}(\mathbf{X})=\begin{bmatrix} x^2+4y^2-4 \\ x^2-2x-y+1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Silloin

$$\mathbf{f}'(\mathbf{X})=\begin{bmatrix} 2x & 8y \\ 2x-2 & -1 \end{bmatrix},$$

ja meidän pitää laskea

$$\mathbf{X}_{n+1}=\mathbf{X}_n-\mathbf{f}'(\mathbf{X}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{X}_n), \quad n\geq 0.$$

Jos valitsemme $X_0=\frac{3}{2}$ *ja* $y_0=\frac{1}{2}$ *niin saamme*

$$\mathbf{X}_1=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Newtonin menetelmä, jatk.

Jos käytämme laskuihin Matlab/Octavea niin määrittelemme ensin funktion $\mathbf{f}$ *komennolla*

```
f=@(X)[X(1)^2+4*X(2)^2-4;X(1)^2-2*X(1)-X(2)+1]
```

ja sitten sen derivaatan $\mathbf{f}'$ *komennolla*

```
df=@(X)[2*X(1),8*X(2);2*X(1)-2,-1]
```

Sitten valitsemme `X=[1.5;0.5]` *ja laskemme monto kertaa* `X=X-df(X)-1*f(X)` *(tai* `X= X-df(X)\f(X)`*) ja tuloksena saamme*

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1.750000000000000\\0.500000000000000\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1.717105263157895\\0.513157894736842\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}1.716438375580136\\0.513283501264863\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix}1.716438125054029\\0.513283587030869\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix}1.716438125053991\\0.513283587030878\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix}1.716438125053991\\0.513283587030878\end{bmatrix}$$