

## MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)

Tentti ja välikokeiden uusinta 8.3.2016

*Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot!**Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!*

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.

Tentin tehtävät ovat 1, 4, 5, 7 ja 8.

Uusintavälikokeiden tehtävät ovat:

1. vk: 1–4,

2. vk: 5–8.

1.

(a) Osoita, että  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^4 + y^2} = 0$ .(b) Löytyykö funktio  $f(x, y, z)$  jonka osittaisderivaatat  $x$ :n ja  $z$ :n suhteen ovat  $2xy + z + y^2$  ja  $y^2 + 2x$ ? Perustelee!

2.

(a) Osoita, että funktio  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  toteuttaa differentiaaliyhtälön  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  joukossa  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$ .(b) Funktio  $u(t, x)$  toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön  $u_t = 2u_{xx}$ . Määritä positiivinen vakio  $c$  siten, että funktio  $v(s, y) = u(2s, cy)$  toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön  $v_s = v_{yy}$ .3. Funktiosta  $f$  tiedetään, että  $f(2, 3) = 1.57$ ,  $f(2.1, 2.9) = 1.55$  ja  $f(1.9, 2.8) = 1.56$ . Määritä derivaatan avulla luvun  $f(2.2, 3.1)$  approksimaatio.

4. Esitä miten Newtonin menetelmällä voidaan approksimatiivisesti ratkaista yhtälösystemi

$$x^2 = y + 1,$$

$$y^2 = x + 2.$$

Laske yksi iteraatiokierros alkuarvoilla  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$  tai selitä millä Matlab/Octaven komennoilla voisit laskea monta iteraatiokierrosta.

5. Yhtälösystemi

$$y^4 z^2 - uy - vz^3 = -1,$$

$$z + u^2 - 2y - v = -1,$$

määrittää  $y$ :n ja  $z$ :n muuttujien  $u$  ja  $v$  funktioina siten että  $y(1, 1) = 1$  ja  $z(1, 1) = 1$ . Laske  $z_v(1, 1)$ .

KÄÄNNÄ!

6. Kahden muuttujan funktiosta  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tiedetään, että se on derivoituva kaikissa pisteissä, derivaatan ainoat nollakohdat ovat  $(3, 2)$  ja  $(1, 3)$  ja funktion arvoista on laskettu seuraavat:

$$\begin{array}{lll} f(0, 0) = 0, & f(4, 0) = 6, & f(4, 4) = 5, \\ f(2, 0) = 9, & f(3, 2) = 7, & f(1, 3) = 11. \end{array}$$

Mitä voit tämän tiedon perusteella sanoa funktion suurimmasta arvosta joukossa  $\Omega = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x \}$ ? Mitä sinun pitäisi tehdä jotta voisit määrittää funktion pienimmän arvon joukossa  $\Omega$ ?

7. Määritä funktion  $x + 2y$  suurin arvo kun  $x^2 + 2y^2 = 9$  käyttämällä Lagrangen kerrointa.

8. Laske integraali  $\iint_{\Omega} 3y \, dx \, dy$  kun  $\Omega = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y \leq -x \}$  käyttämällä napakoordinaatteja.