

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Jos väite on tosi, riittää pelkkä vastaus. Jos väite ei ole tosi, vaaditaan lyhyt perustelu.

- (a) Kuvaus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on mitallinen jos ja vain jos jokaisella avoimella joukolla $U \subset \mathbb{R}$, joukko $f^{-1}(U)$ on \mathbb{R}^n :n avoin osajoukko.
- (b) Jos $g, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ovat mitallisia funktioita, niin niiden erotus $f - g$ on mitallinen.
- (c) Funktio $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on Lebesguen integroitava jos ja vain jos funktio $|f| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on Lebesguen integroitava.
- (d) Jos $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ on jono ei-negatiivisia mitallisia funktioita, niin pätee

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\lambda \leq \int \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\lambda$$

2. Määrittele käsite Carathéodoryn ulkomitta ja osoita, että Lebesguen ulkomitta on subadditiivinen.

3. (a) Olettamalla tunnetuksi Hausdorffin ulkomitta, selvitä mikä on Hausdorffin dimensio.

- (b) Olkoon $\square^1 = [0, 1] \times [0, 1]$ tason suljettu yksikköneliö. Jaetaan neliön sivut viiteen yhtäsuureen osaan koordinaattiakselien suuntaisilla suorilla. Neliö \square^1 tulee jaetuksi pienempiin neliöihin, jotka jaetaan mustiin ja valkoisiin shakkilaudan tapaan siten, että kärkipisteeseen $(0, 0)$ liittyvä neliö on musta. (Piirrä kuva!) Poistetaan valkoisten neliöiden sisäpisteet. Toistetaan konstruktio induktiivisesti kaikkiin jäljelle jääneisiin (mustiin) neliöihin \square_j^2 . Vaiheessa k jaetaan neliöiden \square_j^k sivut viiteen yhtäsuureen osaan koordinaattiakselien suuntaisilla suorilla ja poistetaan ruudutuksessa syntyvien valkoisten neliöiden sisäpisteet. Kunkin neliön \square_j^k kärkipisteisiin liittyvä, jaossa syntyvä neliö on musta.

Mikä on jäljelle jäävän joukon

$$\Gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{j_k} \square_j^k$$

Hausdorffin dimensio? (Voit olettaa, että $0 < H^s(\Gamma) < \infty$ jollakin $s \geq 0$.)

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesguen integroitava funktio ja $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, ehdon $f_k(x) = \exp(-|x|^2/k)$ määräämä funktio. Osoita, että pätee

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f f_k d\lambda = \int f d\lambda$$

Perustele vastauksesi tarkasti. Luennolla todistetut lauseet saa olettaa tunnetuiksi.