

Mat-1.015, Modernin analyysin perusteet

Tentti, 18.9. 2000

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH

1. Olkoon annettu kuvaus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = \frac{\alpha}{1 + |x|}, \quad \text{missä } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Millä α :n arvoilla f on tasaisesti jatkuva?

b) Millä α :n arvoilla f on vahva kontraktio?

Perustele!

2. Tarkastellaan metristä avaruutta (\mathbb{Q}, d) , missä \mathbb{Q} on rationaalipisteiden joukko, ja metriikka d on "tavallinen":

$$d(p, q) = |p - q|.$$

Asetamme $E = \{p \in \mathbb{Q} \mid 1 < p < \sqrt{3}\}$.

a) Onko E \mathbb{Q} :n avoin osajoukko?

b) Määrää E :n reuna ∂E \mathbb{Q} :ssa.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

a) Määrittele joukon $A \subset X$ yhtenäisyys. (1p)

b) Määrittele joukon $K \subset X$ kompaktisuus. (1p)

Olkoon annettuna kuvaus $f : X \rightarrow X$, joka on jatkuva.

c) Mitä voit sanoa joukoista $f(A)$ ja $f(K)$, jos A on yhtenäinen ja K kompakti? (2p)

d) Todista c)–kohdassa muotoilemasi väitteet. (2p)

4. Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Määrittele funktion f mitallisuus.

b) Todista, että jatkuvat funktiot ovat mitallisia.

5. *Fatou*'n lemma. Muotoile ja todista!