

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin kysytyt tiedot!

Koulutusohjelmalyhenteet: AS, KEM, KON, MAA, MAK, PUU, RYK, TFY, TIK, TUO, SÄH

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Jos väite on tosi, riittää pelkkä vastaus. Jos väite ei ole tosi, konstruoi jokin vastaesimerkki.

Olkoon X, Y topologisia avaruuksia ja $f : X \rightarrow Y$ jatkuva kuvaus.

- (a) Avoimen joukon kuvajoukko on avoin.
 - (b) Kompaktin joukon kuvajoukko on kompakti.
 - (c) Ylinumeroituvan joukon kuvajoukko on ylinumeroituva.
 - (d) Joukon A sisäpisteen alkukuva on joukon $f^{-1}(A)$ sisäpiste.
 - (e) Avoimen joukon komplementin alkukuva on suljettu.
 - (f) Jos $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, missä joukot A_i ovat suljettuja kaikilla $i \in \mathbb{N}$, niin sen alkukuvajoukko on suljettu.
2. Olkoon X metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ laskeva jono epätyhjiä kompakteja X :n osajoukkoja. Osoita, että joukkojen A_n leikkaus $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ on epätyhjä ja kompakti.
3. (a) Määrittele Lebesgue-mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^n$
(b) Osoita, että irrationaalilukujen joukko $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on mitallinen.

4. Olkoon $C_\alpha \subset I = [0, 1]$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ Cantorin joukko, joka saadaan poistamalla ensimmäisessä vaiheessa väli $I_{1,1} = (\alpha, 1 - \alpha)$. Toisessa vaiheessa poistetaan välit

$$I_{2,1} = (\alpha^2, \alpha(1 - \alpha)), \quad I_{2,2} = (1 - \alpha + \alpha^2, 1 - \alpha^2).$$

Jatketaan induktiivisesti poistamalla i :nnessä vaiheessa vastaavasti 2^{i-1} avointa väliä $I_{i,1}, \dots, I_{i,2^{i-1}}$, joiden kunkin pituus on $(1 - 2\alpha)\alpha^{i-1}$. Joukko C_α määreytyy ehdosta

$$I \setminus C_\alpha = \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{2^{j-1}} I_{j,k}$$

Miten pitää valita parametri α , jotta joukon C_α Hausdorffin dimensioksi tulee $\frac{1}{2}$? Voit olettaa, että $0 < H^{1/2}(C_\alpha) < \infty$.

5. Määrää integraali

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

Lebesguen dominooidun konvergenssilauseen avulla. Perustele vastauksesi tarkasti.