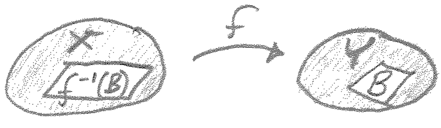
Mitalliset funktiot [GZ 5]

Alkeet [GZ 5.1]



$f: X \to Y$ <u>indusoi</u> perheestä $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ perheen

$$\mathcal{C} := \{ f^{-1}(B) \subset X \mid B \in \mathcal{B} \}$$

ja <u>ko-indusoi</u> perheestä $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ perheen

$$\mathcal{D} := \{ B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}.$$

Jos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ topologioita, niin $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ myös!
Jos $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-algebroja, niin $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ myös!
"f^{-1} kunnioittaa joukko-opin operaatioita"

<u>Muistetaan:</u>

Olkoon $\mathcal{T}_X$ X:n topologia,
$\mathcal{T}_Y$ Y:n topologia.

$f: X \to Y$ on <u>$(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-jatkuva</u> (lyhyemmin: <u>jatkuva</u>),
jos

$$\underbrace{\{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y \}} \subset \mathcal{T}_X .$$

indusoitu topologia!

<u>Määritelmä</u> (samassa hengessä):

Olkoon $\mathcal{M}$ X:n σ-algebra,
$\mathcal{N}$ Y:n σ-algebra.

$f: X \to Y$ on <u>$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-mitallinen</u> (lyhyemmin: <u>mitallinen</u>),

jos

$$\{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{N} \} \subset \mathcal{M}$$

eli $\forall V \in \mathcal{N}: f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.

indusoitu σ-algebra!

Nähdään, että

$$X \xrightarrow[(\mathcal{M},\mathcal{N})\text{-mitallinen}]{f} Y \xrightarrow[(\mathcal{N},\mathcal{O})\text{-mitallinen}]{g} Z \quad \Rightarrow \quad X \xrightarrow[(\mathcal{M},\mathcal{O})\text{-mitallinen}]{g\circ f} Z.$$

Meille tärkeä tapaus

$$Y = Z = [-\infty, +\infty],$$

jolle hyvä σ-algebra on Borel-joukkojen perhe

$$\Sigma(\mathcal{T}_{[-\infty,+\infty]}),$$

missä $\mathcal{T}_{[-\infty,+\infty]}$ on <u>pienin</u> topologia, jolle kaikki välit $[a,b] \subset [-\infty,+\infty]$ ovat suljettuja.

<u>Määr.</u>

Olkoon $\mathcal{M}$ X:n σ-algebra.
$f: X \to [-\infty,+\infty]$ on <u>$\mathcal{M}$-mitallinen</u> (lyhyemmin: mitallinen), jos se on $(\mathcal{M}, \Sigma(\mathcal{T}_{[-\infty,+\infty]}))$-mitallinen.

<u>Määr.</u>

Joukon $E \subset X$ <u>karakteristinen funktio</u>
$\chi_E : X \to \mathbb{R}$ määritellään

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in E, \\ 0, & \text{jos } x \in E^c. \end{cases}$$

<u>Huom.</u>

χ_E on $\mathcal{M}$-mitallinen $\iff$ $E \in \mathcal{M}$.

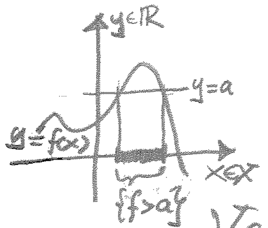
<u>Sanontoja:</u>

$\Sigma(\mathcal{T}_X)$-mitallinen $f: X \to [-\infty,+\infty]$ on <u>Borel-mitallinen</u>.

$\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$-mitallinen $f: \mathbb{R}^n \to [-\infty,+\infty]$ on <u>Lebesgue-mitallinen</u>.

Merkintöjä:

Olkoon $a \in \mathbb{R}$, $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$.



$$\{f > a\} := \{x \in X \mid f(x) > a\} = f^{-1}(]a, \infty]),$$

$$\{f > g\} := \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}.$$

Vastaavasti määritellään

$$\{f < a\},\ \{f \geq a\},\ \{f \leq a\},\ \{f = a\},\ \{f \neq a\}, \ldots$$

$$\{f < g\},\ \{f \geq g\},\ \{f \leq g\},\ \{f = g\},\ \{f \neq g\}, \ldots$$

Lause 5.2

Olkoon $\mathcal{M}$ X:n σ-algebra ja $f : X \to [-\infty, +\infty]$.

Silloin (1) $\Leftrightarrow$ (2):

(1) f $\mathcal{M}$-mitallinen.

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$: $\{f > a\} \in \mathcal{M}$.

(tai vastaavasti $\{f \geq a\} \in \mathcal{M}$, $\{f < a\} \in \mathcal{M}$ tai $\{f \leq a\} \in \mathcal{M}$).

Tod.

$(1 \Rightarrow 2)$ $\{f > a\} = f^{-1}(\underbrace{]a, +\infty]}_{\text{Borel-joukko (jopa avoin!)}}) \overset{f\ \mathcal{M}\text{-mit.}}{\in} \mathcal{M}$. $\square$

$(2 \Rightarrow 1)$ $\mathcal{D} := \{B \subset [-\infty, +\infty] \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$

on σ-algebra (ks. s. 71) ja f on $(\mathcal{M}, \mathcal{D})$-mitallinen.

f on $\mathcal{M}$-mitallinen, koska $\Sigma(\mathcal{J}_{[-\infty,+\infty]}) \subset \mathcal{D}$, koska

$$f^{-1}([a,b]) = \{f \geq a\} \cap \{f \leq b\}$$

$$= \underbrace{\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{f > a - \tfrac{1}{k}\}}_{\overset{(2)}{\in} \mathcal{M}}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\underbrace{\{f > b\}}_{\overset{(2)}{\in} \mathcal{M}}{}^{c}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$$

(Huom, $\Sigma(\mathcal{J}_{[-\infty,+\infty]})$ on pienin σ-algebra, jossa mukana kaikki välit $[a,b]$). $\blacksquare$

Huom. 5.4. Olkoot $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ $\mathcal{M}$-mitallisia. Silloin $\{f > g\} \in \mathcal{M}$, koska

$$\{f > g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \big(\underbrace{\{f > r\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{g < r\}}_{\in \mathcal{M}} \big).$$

Vastaavasti $\{f \geq g\}, \{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{M}$.

Esim. Jatkuva $f : X \to [-\infty, +\infty]$ on Borel-mitallinen:

$$\{f \geq a\} = f^{-1}(\underbrace{[a, +\infty]}_{\text{suljettu}}) \overset{f \text{ jatkuva}}{\subset} X \quad \text{suljettu}.$$

Siten jatkuva $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ on Lebesgue-mitallinen, koska $\Sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}) \subset \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$.

$(\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}), \Sigma(\mathcal{T}_{[-\infty, +\infty]}))$-mit.

Huom. 5.6.

Jatkuva $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ ei välttämättä ole $(\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}), \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^1}))$ - mitallinen!

Valinta-aksiooma $\overset{[GZ\ 4.5]}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, jolloin voidaan ottaa esim. $g, h : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ siten, että

$$\mathbb{R}^1 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^1 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^1 \quad \& \quad \mathbb{R}^1 \xrightarrow{g \circ h} \mathbb{R}^1$$

h: homeomorfismi $\Rightarrow$ jatkuva $\Rightarrow$ Borel-mit. $\Rightarrow$ Lebesgue-mit. eli $(\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^1}), \Sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^1}))$-mit.

g: Lebesgue-mitallinen eli $(\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^1}), \Sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^1}))$-mit.

$g \circ h$: ei Lebesgue-mitallinen!

ONGELMA: $\underbrace{\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^1})}_{\neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^1)} \neq \Sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}^1})$.

Huom. 5.7.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} [-\infty, +\infty] \xrightarrow{\varphi} [-\infty, +\infty] \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi \circ f} [-\infty, +\infty]$$

f: Lebesgue-mitallinen eli $(\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}), \Sigma(\mathcal{T}_{[-\infty, +\infty]}))$-mitallinen

φ: Borel-mitallinen eli $(\Sigma(\mathcal{T}_{[-\infty, +\infty]}), \Sigma(\mathcal{T}_{[-\infty, +\infty]}))$-mitallinen

$\varphi \circ f$: Lebesgue-mitallinen eli $(\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}), \Sigma(\mathcal{T}_{[-\infty, +\infty]}))$-mitallinen.

Samat σ-algebrat!

Lause 5.5, 5.8

Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-mitallisia. Silloin

$$\lambda f,\ f+g,\ fg,\ |f|^p,\ \min(f,g),\ \underbrace{\max(f,g)}_{\max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x))\ \text{jne.}} : X \to \mathbb{R}$$

ovat $\mathcal{M}$-mitallisia.

Jos lisäksi $\forall x \in X : f(x) \neq 0$, niin $\frac{1}{f}$ on $\mathcal{M}$-mitallinen.

Tod.

$$\{f+g > \overset{a \in \mathbb{R}}{a}\} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > a}} \{f+g > q\}$$

$$= \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s > a}} \underbrace{\Big(\underbrace{\{f > r\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{\{g > s\}}_{\in \mathcal{M}}\Big)}_{\in \mathcal{M}} \overset{\substack{\text{numeroituva} \\ \text{yhdiste}}}{\in} \mathcal{M}.$$

$\Rightarrow f+g$ on $\mathcal{M}$-mitallinen. $\boxtimes$

$$\underset{\substack{\mathcal{M}\text{-mitallinen} \\ \text{eli} \\ (\mathcal{M}, \Sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}}))\text{-mit.}}}{X \xrightarrow{f} \mathbb{R}} \underset{\substack{\text{jatkuva} \\ \Rightarrow \text{Borel-mitallinen eli} \\ (\Sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}}), \Sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}}))\text{-mit.}}}{\xrightarrow{t \mapsto |t|^p} \mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \underset{\mathcal{M}\text{-mitallinen.}}{X \xrightarrow{|f|^p} \mathbb{R}}$$

$\boxtimes$

Jos $0 \notin f(X)$, niin

$$\underset{\substack{\mathcal{M}\text{-mitallinen} \\ \text{eli} \ldots}}{X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\}} \underset{\substack{\text{jatkuva} \\ \Rightarrow \text{Borel-mitallinen} \\ \text{eli} \ldots}}{\xrightarrow{t \mapsto 1/t} \mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \underset{\mathcal{M}\text{-mitallinen.}}{X \xrightarrow{\frac{1}{f}} \mathbb{R}}$$

$\boxtimes$

Jätetään lukijalle tapaukset

$$\lambda f,\ fg,\ \max(f,g),\ \min(f,g) : X \to \mathbb{R}.$$

$\blacksquare$

<u>Huom.</u> $\mathcal{M}$-mitallisuus siis säilyy algebrallisissa operaatioissa. Huomaa kuitenkin, että f^2 $\mathcal{M}$-mit. $\not\Rightarrow$ f $\mathcal{M}$-mit.: esim. $E \subset X$, $E \notin \mathcal{M}$,

$$f(x) := \begin{cases} +1, & \text{jos } x \in E, \\ -1, & \text{jos } x \in E^c. \end{cases}$$

Määr. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus. Sanotaan, että jokin ominaisuus pätee μ-melkein kaikkialla (lyhyemmin: μ-m.k.), jos se pätee joukossa $N^c = X \setminus N$, missä
$$N \in \mathcal{M}, \quad \mu(N) = 0.$$

Lause 5.9
Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ täydellinen (esim. $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu^*)$) mitta-avaruus, $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$, f $\mathcal{M}$-mitallinen ja $f = g$ μ-m.k. Silloin myös g on $\mathcal{M}$-mitallinen.

Tod.
$$N := \{f \neq g\} = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$
Nyt $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$.
Ota $a \in \mathbb{R}$.
$$\{g > a\} = (\underbrace{\{g>a\} \cap N}_{\substack{\in \mathcal{M}, \text{ koska} \\ \{g>a\}\cap N \subset N, \\ \mu(N)=0 \text{ ja } \mu \text{ täydellinen.}}}) \cup (\underbrace{\{g>a\} \cap N^c}_{= \underbrace{\{f>a\}}_{\in \mathcal{M}} \cap \underbrace{N^c}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}})$$
$$\Rightarrow \{g > a\} \in \mathcal{M}. \quad \blacksquare$$

Huom. Kun μ on täydellinen mitta, voidaan samaistaa funktiot, joita "μ ei erota toisistaan": siis merkitään
$$f \overset{\mu}{\sim} g \overset{\text{määr.}}{\Longleftrightarrow} f = g \ \mu\text{-m.k.}$$
Esim. $f : X \to [-\infty, +\infty]$, jolle $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$,
$g : X \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{kun } |f(x)| = \infty. \end{cases}$

Mitallisten funktioiden jonot [GZ 5.2]

Lause 5.13

Olkoot $f_i : X \to [-\infty, +\infty]$ $\mathcal{M}$-mitallisia $(\forall i \in \mathbb{Z}^+)$.

Huom. Numeroituva!

Silloin $\mathcal{M}$-mitallisia ovat myös

$$\underbrace{\sup_{i\in\mathbb{Z}^+} f_i}, \quad \inf_{i\in\mathbb{Z}^+} f_i, \quad \limsup_{i\to\infty} f_i, \quad \liminf_{i\to\infty} f_i .$$

$(\sup_{i\in J} f_i)(x) := \sup\{f_i(x) \mid j \in J\}$ jne...

Tod.

(1) $\{\sup_i f_i > a\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\{f_i > a\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}.$ $\boxtimes$

(2) $\{\inf_i f_i > a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{f_i > a\} \in \mathcal{M}.$ $\boxtimes$ [Myös: $\inf_i(f_i) = -\sup_i(-f_i)$.]

$$(1,2) \Rightarrow \begin{cases} \limsup_{i\to\infty} f_i = \inf_{j\geq 1}(\sup_{i\geq j} f_i) \quad \mathcal{M}\text{-mitallinen.} \ \boxtimes \\ \liminf_{i\to\infty} f_i = \sup_{j\geq 1}(\inf_{i\geq j} f_i) \quad \mathcal{M}\text{-mitallinen.} \ \blacksquare \end{cases}$$

Määr. (Suppenemisia)

Olkoot $f, f_j : X \to \mathbb{R}$ $(\forall j \in \mathbb{Z}^+)$.

Sanotaan, että

"jono $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ suppenee funktioon f pisteittäin",

merkitään

$$\boxed{f_j \to f \text{ pisteittäin}},$$

jos

$$\forall x \in X : |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Sanotaan, että

"jono $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ suppenee funktioon f tasaisesti",

merkitään

$$\boxed{f_j \to f \text{ tasaisesti}},$$

jos

$$\sup_{x\in X} |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ täydellinen (esim. $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mu^*)$) mitta-avaruus,

$f_j : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{M}$-mitallisia $(\forall j \in \mathbb{Z}^+)$,

$f : X \to [-\infty, +\infty]$.

Sanotaan, että

"jono $(f_j)_{j=1}^\infty$ suppenee funktioon f <u>μ-melkein kaikkialla</u>",

merkitään $\boxed{f_j \to f \quad \mu\text{-m.k.}}$,

jos

$$\mu\text{-m.k. } x \in X : \quad |f_j(x) - f(x)| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0.$$

<u>Huom.</u>

Jos $f_j \to f$ μ-m.k., niin $f(x) \in \mathbb{R}$ μ-m.k. $x \in X$ ja f on $\mathcal{M}$-mitallinen!

[$\Leftarrow$ Lauseet 5.9 ja 5.13].

<u>Tehtävä</u>

Olkoon $\mu = \lambda_{\mathbb{R}^1}$ Lebesgue-mitta. Anna esimerkit, joissa

a) $f_j \to f$ pisteittäin muttei tasaisesti,

b) $g_j \to g$ μ-m.k. muttei pisteittäin.

Mitallisen funktion approksimointi [GZ 5.3]

Määr. Funktio $f: X \to \mathbb{R}$ on yksinkertainen, jos sen arvojoukko $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}$ on äärellinen.

[Toisin sanoen: f on karakterististen funktioiden lineaarikombinaatio].

Silloin jos $\mathrm{card}(f(X)) = k$, $f(X) = \{a_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}$,

on f:n normaaliesitys

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \cdot \chi_{f^{-1}(\{a_j\})}$$

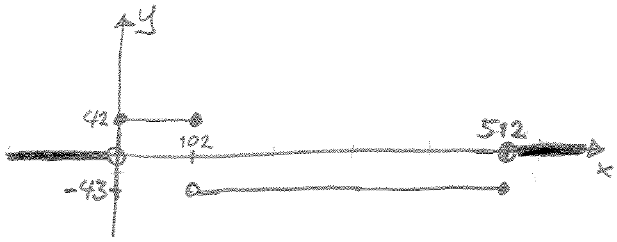
[Silloin f $\mathcal{M}$-mitallinen $\Leftrightarrow$

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}: \quad f^{-1}(\{a_j\}) \in \mathcal{M}.]$$

Esim. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := 85 \cdot \chi_{[0,102]}(x) - 43 \cdot \chi_{[0,512]}(x)$$

$$= \begin{cases} 42, & \text{jos } x \in [0,102], \\ -43, & \text{jos } x \in]102, 512], \\ 0, & \text{muutoin}. \end{cases}$$



$\Rightarrow$ f:n normaaliesitys

$$f = 42 \cdot \chi_{[0,102]} + (-43) \cdot \chi_{]102,512]}.$$

Lause 5.24

Olkoon $f: X \to [-\infty, +\infty]$. Silloin

$\exists$ yksinkertaiset $f_i : X \to \mathbb{R}$ (missä $i \in \mathbb{Z}^+$), joille

(1) $\forall x \in X: f_i(x) \to f(x)$.

Lisäksi voidaan valita $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ siten, että

(2) jos $f \geq 0$, niin $0 \leq f_i \leq f_{i+1} \leq f$ $(\forall i)$,

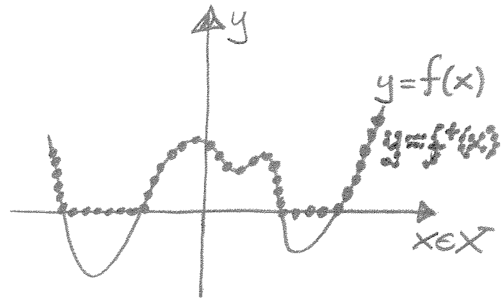
(3) jos f rajoitettu, ($|f| \leq$ vakio) niin $f_i \to f$ tasaisesti,

(4) jos f mitallinen, niin f_i mitallisia $(\forall i)$.

Tod.

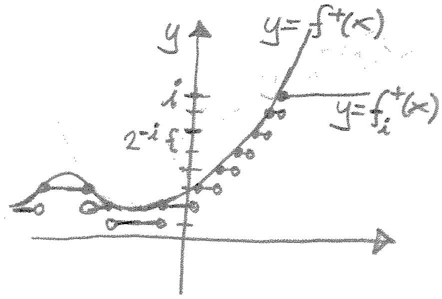
Määr. $f^+, f^- : X \to [0, +\infty]$ siten, että

$$f^+(x) := \max(0, f(x)),$$
$$f^-(x) := \max(0, -f(x)).$$



Nyt $f = \underbrace{f^+}_{\geq 0} - \underbrace{f^-}_{\geq 0}$. Määritellään

$$f_i^+(x) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^i}, & \text{kun } \frac{k-1}{2^i} \leq f^+(x) < \frac{k}{2^i} \quad (1 \leq k \leq i \cdot 2^i), \\ i, & \text{kun } f^+(x) \geq i. \end{cases}$$



Vastaavasti määritellään f_i^-.

$$f_i := f_i^+ - f_i^-.$$

Lukija voi tarkistaa, että tällaisilla f_i on halutut ominaisuudet. $\blacksquare$