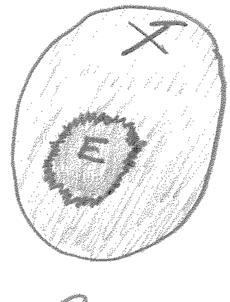
III Mittateoria & integrointi [GZ 4–6]

Mittateoria [GZ 4]



Haluttaisiin "punnita" joukot $E \subset X$...
Mitä tämä voisi tarkoittaa?
Joukon alkioiden lukumäärää?
Joukon pinta-alaa, tilavuutta, "massaa" tms.?

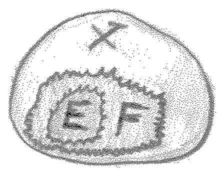
Ulkomitta [G4 4.1]

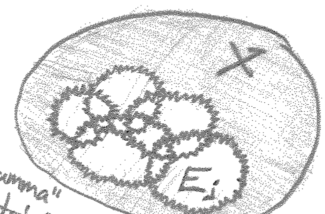
<u>Määr.</u> <u>Ulkomitta</u> joukossa X on kuvaus

$$\psi : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty],$$

jolle

$$\begin{cases} (1) & \psi(\emptyset) = 0, \\ (2) & E \subset F \Rightarrow \psi(E) \le \psi(F), \\ (3) & \psi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \psi(E_j). \end{cases}$$





[Huom. "Ylinumeroituva summa" ei olisi mielenkiintoinen, ks. harjoitustehtävä.]

[Mahdollinen tulkinta:
$\psi(E) \in [0,\infty]$ on joukon $E \subset X$ "paino".]

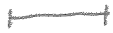
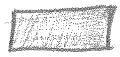
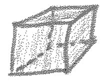
<u>Esim.</u> Nollaulkomitta: $\forall E \subset X : \psi(E) = 0.$

<u>Esim.</u> $\psi(E) = \# E := \begin{cases} \mathrm{card}(E), & \text{kun } E \subset X \text{ äärellinen}, \\ \infty, & \text{kun } E \subset X \text{ ääretön}. \end{cases}$

(alkioiden lukumäärä)

<u>Esim.</u> $\psi(E) := \begin{cases} 0, & \text{kun } E = \emptyset, \\ 1, & \text{kun } E \neq \emptyset. \end{cases}$

Ei ole helppo keksiä, millainen olisi ulkomitta $\psi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, joka mittaisi joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ "n-dimensioista tilavuutta".

(1-tilavuus: pituus 
2-tilavuus: pinta-ala 
3-tilavuus: tilavuus "tavallisesti"  .)

Tingitään siis hetkeksi ulkomitan vaatimuksista, esitellään alkeellisempi "joukkojen puntari":

<u>Määr.</u>

Joukon X "<u>mitake</u>" (eli "alkeismitta") on kuvaus

$$m : \mathcal{A} \to [0,\infty],$$

missä

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X), \quad \text{/// } \mathcal{A} \text{ "alkeisjoukkojen" perhe}$$

$$m(\emptyset) = 0.$$

[Hyvä seikka: "mitakkeita" helppo keksiä.
Huono seikka: "mitake" on varsin heikko työkalu.]

Huom.: Jos $\psi : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on ulkomitta ja $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, niin

$$m := \psi|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0,\infty]$$

on "mitake" (tässä siis $\forall E \in \mathcal{A} : m(E) = \psi(E)$).

<u>Esim.</u> Metriselle avaruudelle (X,d) "halkaisijamitake"

$$\text{diam} : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$$

ei ole ulkomitta (kun $\#X \geq 2$).

Esim.

Joukon $\mathbb{R}^n$ osittaisjärjestys $\leq_n$:

$$a \leq_n b \overset{\text{määr.}}{\iff} \forall k \in \{1,\dots,n\}: a_k \leq b_k$$

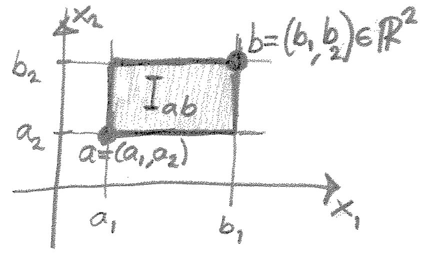
$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ jne.

tavallinen $\mathbb{R}$:n $\leq$

Määritellään

väli (eli intervalli eli "laatikko")

$$I_{ab} := \{ c \in \mathbb{R}^n \mid a \leq_n c \leq_n b \}$$
$$= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] .$$



Alkeisjoukkojen perhe

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\} \cup \{ I_{ab} \subset \mathbb{R}^n \mid a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \leq_n b \} .$$

"Lebesgue-mitake"

$$\lambda_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty],$$

$$\lambda_{\mathbb{R}^n}(\emptyset) := 0, \qquad \lambda_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) := \infty,$$

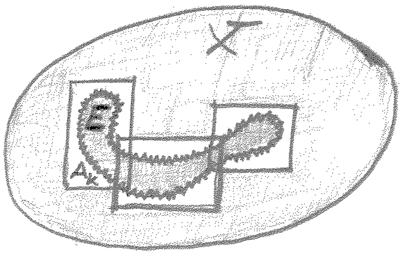
$$\lambda_{\mathbb{R}^n}(I_{ab}) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) .$$

Määr. Joukon X "mitake" $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ synnyttää kuvauksen

$$m^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty],$$

$$m^*(E) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \;\Big|\; \underbrace{E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \mathcal{A}}_{} \Big\} .$$

siis $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ on joukon E numeroituva alkeisjoukkopeite!



Lause

"Mitakkeen" $m: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ synnyttämä

$m^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on ulkomitta.

Tod.

$m^*(E) \in [0,\infty]$ on hyvinmääritelty:

$\{X\} \subset \mathcal{A}$ on joukon $E \subset X$ numeroituva peite

(joten tässä ei esiinny infimumia tyhjästä joukosta)

ja lisäksi $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{m(\underbrace{A_k}_{\in \mathcal{A}})}_{\in [0,\infty]} \in [0,\infty]$.

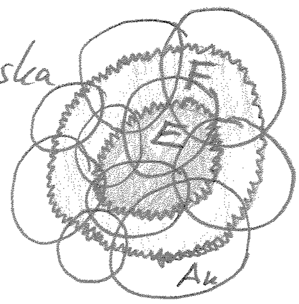
(1) $m^*(\emptyset) = 0$, koska

$$0 \le m^*(\emptyset) \overset{\emptyset \subset \emptyset \in \mathcal{A}}{\le} m(\emptyset) = 0. \boxtimes$$

(2) Jos $E \subset F \subset X$, niin $m^*(E) \le m^*(F)$, koska

"jos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ on joukon F peite,

niin se on myös joukon E peite". $\boxtimes$



(3) Osoitettava: $m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j)$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota $\{A_{jk}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, jolle $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{jk}$ &

$$m^*(E_j) + 2^{-j} \cdot \varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} m(A_{jk}).$$

Silloin $\{A_{jk} \mid j,k \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathcal{A}$

on joukon $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ numeroituva peite, jolle

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) &\le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m(A_{jk}) \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \left(m^*(E_j) + 2^{-j} \cdot \varepsilon\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E_j) + \varepsilon \qquad (\forall \varepsilon > 0). \blacksquare \end{aligned}$$

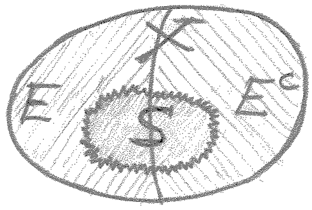
Idea:
Keksi avaruuden X kannalta kiva "mitake" (esim. Lebesgue-mitake $\lambda_{\mathbb{R}^n}$) — se synnyttää mukavan(?) ulkomitan (esim. $\lambda^*_{\mathbb{R}^n}$, tästä myöhemmin lisää...).

Ulkomitan silmissä hyviä osajoukkoja ovat mitalliset joukot:

<u>Määr.</u> Olkoon $\Psi : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ulkomitta. Joukko $E \subset X$ on <u>Ψ-mitallinen</u>, jos

$$\forall S \subset X : \quad \Psi(S) = \Psi(E \cap S) + \Psi(E^c \cap S).$$

$E^c := X \setminus E$, joukon $E \subset X$ <u>komplementti</u>.

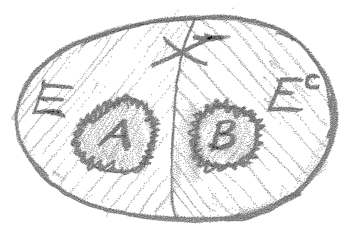


[Tulkinta: mitallinen $E \subset X$ jakaa avaruuden X "siististi" kahtia.]

Merk.
$$\mathcal{M}(\Psi) := \{E \subset X \mid E \text{ on } \Psi\text{-mitallinen}\}.$$

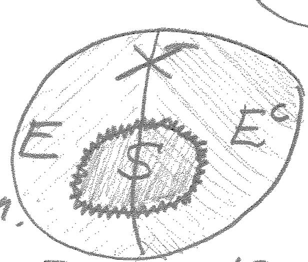
<u>Helppo tehtävä:</u>
Näytä, että $E \in \mathcal{M}(\Psi) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix}\forall A \subset E \\ \forall B \subset E^c\end{matrix}\right\} : \quad \Psi(A \cup B) = \Psi(A) + \Psi(B).$$



<u>Huom.</u>

$$E \in \mathcal{M}(\psi) \overset{(E^c)^c = E}{\iff} E^c \in \mathcal{M}(\psi)$$



eli komplementointi säilyttää mitallisuuden.

Saadaan $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{M}(\psi)$, koska $\emptyset^c = X$ ja $\forall S \subset X$:

$$\psi(S) = \psi(\emptyset \cap S) + \psi(\emptyset^c \cap S).$$

<u>Esim.</u> Olkoon $\psi(E) := \begin{cases} 0, & \text{jos } E = \emptyset, \\ 1, & \text{jos } E \neq \emptyset. \end{cases}$

Silloin $\mathcal{M}(\psi) = \{\emptyset, X\}$.

<u>Esim.</u> Olkoon $\psi(E) := \# E$ $(\forall E \subset X)$.

Silloin $\mathcal{M}(\psi) = \mathcal{P}(X)$.

<u>Propositio</u>

Olkoon $\psi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ulkomitta ja $\psi(E) = 0$. Silloin $E \in \mathcal{M}(\psi)$.

<u>Tod.</u>

Ota $S \subset X$.

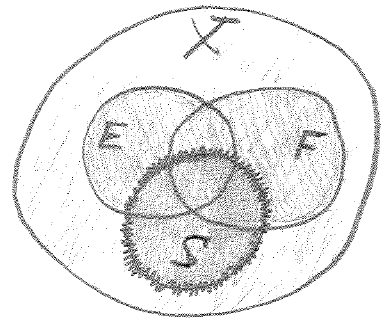
$$\begin{aligned}
\psi(S) &\overset{(3), s.51}{\leq} \psi(\underbrace{E \cap S}_{\subset E}) + \psi(\underbrace{E^c \cap S}_{\subset S}) \\
&\overset{(2)}{\leq} \underbrace{\psi(E)}_{=0} + \psi(S) \\
&= \psi(S)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi(S) = \psi(E \cap S) + \psi(E^c \cap S). \quad \blacksquare$$

Yllä nähtiin, että mitallisuus säilyy komplementoinnissa. Entä muissa joukko-opin perusoperaatioissa (yhdisteet / leikkaukset)?

<u>Lemma</u> Olkoot $E, F \in \mathcal{M}(\psi)$.
Silloin E^c, $E\cap F$, $E\cup F \in \mathcal{M}(\psi)$.
$\uparrow$ (ks. Huom. s. 56).

<u>Tod.</u>



$$E\cap F \overset{\text{de Morgan}}{=} (E^c \cup F^c)^c,$$

joten riittää todistaa $E\cup F \in \mathcal{M}(\psi)$.
Ota $S \subset X$.

$$\psi((E\cup F)\cap S) + \psi(\underbrace{(E\cup F)^c}_{E^c\cap F^c}\cap S)$$

$$\overset{E \text{ mit.}}{=} \psi(\underbrace{E\cap(E\cup F)\cap S}_{E\cap S}) + \underbrace{\psi(\underbrace{E^c\cap(E\cup F)\cap S}_{E^c\cap F\cap S}) + \psi(E^c\cap F^c\cap S)}_{\overset{F \text{ mit.}}{=} \psi(E^c\cap S)}$$

$$= \psi(E\cap S) + \psi(E^c\cap S)$$

$$\overset{E \text{ mit.}}{=} \psi(S). \qquad \blacksquare$$

<u>Määr.</u>
Kokoelma $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon X <u>σ-algebra</u>, jos

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{M}$,

(2) $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{M}$,

(3) $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$.

[Silloin myös toki $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c\right)^c \in \mathcal{M}$.]

[Oletuksista (1) & (2) voisi poistaa ehtoja, mutta yllä oleva määritelmä on "kauniimpi" näin.]

Lause

Olkoon $\Psi : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ulkomitta.
Silloin $\mathcal{M}(\Psi)$ on σ-algebra.

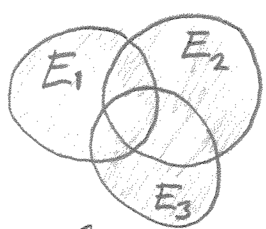
Tod.

Sivulla 56 huomattiin, että

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{M}(\Psi) \quad \text{ja} \quad E \in \mathcal{M}(\Psi) \Leftrightarrow E^c \in \mathcal{M}(\Psi).$$

Pitää vielä näyttää, että

$$\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\Psi) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}(\Psi).$$



HUOM! Tämä konstruktio on itsessään mielenkiintoinen.

Olkoon
$$\begin{cases} F_1 := E_1 \in \mathcal{M}(\Psi), \\ F_{k+1} := E_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} E_j = E_{k+1} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right)^c \overset{\text{Lemma s. 57}}{\in} \mathcal{M}(\Psi). \end{cases}$$

[Piirrä F_1, F_2, F_3!]

Nyt perhe $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\Psi)$ on pistevieras (eli erillinen: $k \neq \ell \Rightarrow F_k \cap F_\ell = \emptyset$). $\circledast$

Lisäksi $F_k \subset E_k$ ja $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

Ota $S \subset X$. Merkitään $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

$$\begin{aligned}
\Psi(S) &\leq \Psi(E \cap S) + \Psi(E^c \cap S) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(F_k \cap S) + \Psi(E^c \cap S) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \Psi(F_k \cap S) + \Psi(E^c \cap S)\right] \\
&\overset{\text{Teht. s. 55 } \& \circledast}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\Psi\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k \cap S\right) + \Psi(E^c \cap S)\right] \qquad \Big\Vert \; E^c \subset \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \Big[\underbrace{\Psi\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) \cap S\right) + \Psi\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)^c \cap S\right)}_{\overset{\bigcup_{k=1}^{n} F_k \in \mathcal{M}(\Psi)}{=} \Psi(S)}\Big] \\
&= \Psi(S).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Psi(S) = \Psi(E \cap S) + \Psi(E^c \cap S) \quad (\forall S \subset X)$

$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = E \in \mathcal{M}(\Psi).$ ■

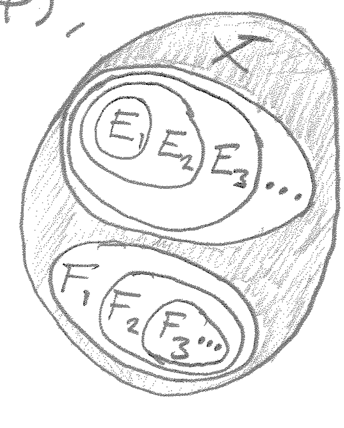
[Huom. Jos $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\Psi)$ pistevieras, niin

$$\Psi\Big(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} F_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi(F_k). \qquad \circledast$$

Tämä tulos kätkeytyi sivun 58 todistukseen!]

Seuraus Olkoon $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}, \{F_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(\Psi)$,

$\forall k:\ E_k \subset E_{k+1},\quad F_k \supset F_{k+1}.$



Silloin

(1) $$\Psi\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \Psi(E_k),$$

(2) $$\Psi\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\Big) = \lim_{k\to\infty} \Psi(F_k),$$

jos $\Psi(F_1) < \infty$.

Tod.

(1) Vain tapaus $\forall k: \Psi(E_k) < \infty$ on mielenkiintoinen:

$$\Psi\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \Psi\big(\underbrace{E_1}_{\in\mathcal{M}(\Psi)} \cup \underbrace{(E_2 \setminus E_1)}_{\in\mathcal{M}(\Psi)} \cup \underbrace{(E_3 \setminus E_2)}_{\in\mathcal{M}(\Psi)} \cup \dots\big)$$ ... ||| pistevieraat!

$$\overset{\circledast}{=} \Psi(E_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Psi(E_{k+1} \setminus E_k)}_{=\Psi(E_{k+1}) - \Psi(E_k)},$$ koska $E_k \subset E_{k+1}$ ja $\Psi(E_k) < \infty$.

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\underbrace{\Psi(E_1) + \sum_{k=1}^{n} \big(\Psi(E_{k+1}) - \Psi(E_k)\big)}_{=\Psi(E_{n+1})}\Big]. \qquad \boxtimes$$

(2) $$\underbrace{\Psi(F_1)}_{<\infty} = \Psi\Big(\underbrace{\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\Big)}_{\in\mathcal{M}(\Psi)} \cup \underbrace{\bigcup_{\ell=1}^{\infty} (F_1 \setminus F_\ell)}_{\in\mathcal{M}(\Psi)}\Big)$$ erilliset!

$$= \Psi\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\Big) + \Psi\Big(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{(F_1 \setminus F_\ell)}_{=:E_\ell \in \mathcal{M}(\Psi)}\Big).$$ Nyt $E_\ell \subset E_{\ell+1}$

$$\overset{(1)}{=} \Psi\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\Big) + \lim_{\ell\to\infty} \underbrace{\Psi(F_1 \setminus F_\ell)}_{=\underbrace{\Psi(F_1)}_{<\infty} - \Psi(F_\ell)}. \qquad \blacksquare$$

Määr. Kuvaus $\mu: \mathcal{M} \to [0,\infty]$ on mitta, kun $\mathcal{M}$ on σ-algebra ja

$$\begin{cases} (1) & \mu(\emptyset) = 0, \\ (2) & \text{jos } \{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M} \text{ pistevieras } \left(\text{eli } j \neq k \Rightarrow E_j \cap E_k = \emptyset\right), \\ & \text{niin } \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j). \end{cases}$$

Ns. numeroituva additiivisuus

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ on mitta-avaruus, kun
$\mathcal{M}$ on X:n σ-algebra ja
$\mu: \mathcal{M} \to [0,\infty]$ on mitta.

Mitta $\mu: \mathcal{M} \to [0,\infty]$ on täydellinen, jos
$\forall F \in \mathcal{M} \ \forall E \subset X$:
$(\mu(F) = 0 \ \& \ E \subset F) \Rightarrow E \in \mathcal{M}$.

Lause.
Olkoon $\Psi: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ulkomitta,
$\mathcal{M} := \mathcal{M}(\Psi)$,
$\mu := \Psi|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to [0,\infty]$
(eli $\mu(E) = \Psi(E)$ kaikilla $E \in \mathcal{M}$).
Silloin μ on täydellinen mitta.

Tod.
Lause s. 58 $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ σ-algebra. ☒
(1) $\mu(\emptyset) = \Psi(\emptyset) = 0$. ☒
(2) Sivun 59 Huomautus $\Rightarrow$ μ numeroituvasti additiivinen. ☒
Propositio s. 56 $\Rightarrow$ μ täydellinen. ■

"Mitake" $m : \overset{\subset \mathcal{P}(X)}{\mathcal{A}} \to [0,\infty]$ synnyttää
ulkomitan $m^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, josta saadaan
mitta $m^*|_{\mathcal{M}(m^*)} : \mathcal{M}(m^*) \to [0,\infty]$, joka synnyttää
ulkomitan $\left(m^*|_{\mathcal{M}(m^*)}\right)^*$, josta saadaan
mitta ... :

$$\begin{tikzcd}
 & m^* \arrow[d] & (m^*|_{\mathcal{M}(m^*)})^* \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \\
m \arrow[ur] & m^*|_{\mathcal{M}(m^*)} \arrow[ur] & \dots \arrow[ur] & \dots \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Eikö tälle prosessille ole loppua?

On! [Ks. esim. kurssi Mat-1.3281 Analyysi I]:

Pätee
$$\boxed{m^* = \left(m^*|_{\mathcal{M}(m^*)}\right)^*.}$$

[On myös ulkomittoja $\psi \neq \left(\psi|_{\mathcal{M}(\psi)}\right)^*$.]

Jos $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ on mitta, pätee

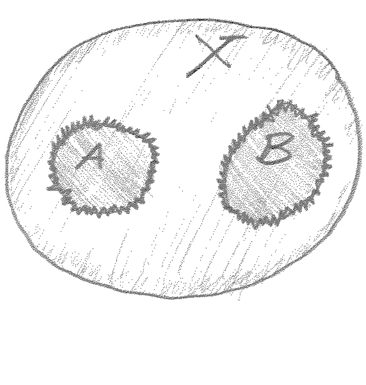
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{M} \subset \mathcal{M}(\mu^*), \\ \mu^*|_{\mathcal{M}} = \mu . \end{array}}$$

Ulkomitta & topologia & metriikka [GZ 4.2]

Tehtävä:
Olkoon $\{\mathcal{M}_j \mid j \in J\}$ kokoelma joukon X σ-algebroja.
Näytä, että $\bigcap_{j \in J} \mathcal{M}_j$ on myös σ-algebra.
Miten tästä päätellään, että perheelle $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ on olemassa pienin X:n σ-algebra $\Sigma(\mathcal{A})$, jolle $\mathcal{A} \subset \Sigma(\mathcal{A})$?

Määr. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus.
$\Sigma(\mathcal{T})$ on ns. Borel-joukkojen σ-algebra.
Ulkomitta $\psi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on Borel-ulkomitta, jos $\Sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{M}(\psi)$.

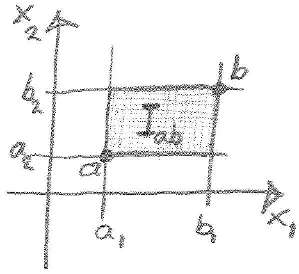
Määr. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.
Ulkomitta $\psi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ on metrinen ulkomitta (eli Carathéodory-ulkomitta), jos
$$\forall A, B \subset X : \ \operatorname{dist}(A, B) > 0 \Rightarrow \psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B).$$



Lause
ψ metrinen ulkomitta
$\Leftrightarrow$ Borel-ulkomitta (metrisessä topologiassa).

Tod
"$\Rightarrow$" Ks. [GZ Theorem 4.12] tai [Analyysi I].
"$\Leftarrow$" Harjoitustehtävä. ($\blacksquare$)

Lebesgue-mitta $\lambda_{\mathbb{R}^n}$ [GZ 4.3]



n-väli ("laatikko")

$$I_{ab} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{a \le_{\mathbb{R}^n} x \le_{\mathbb{R}^n} b}_{\forall i \in \{1,\dots,n\}:\ a_i \le x_i \le b_i} \}$$

$$= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Alkeisjoukot

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n} = \{ \emptyset, \mathbb{R}^n \} \cup \{ I_{ab} \mid a, b \in \mathbb{R}^n,\ a \le_{\mathbb{R}^n} b \},$$

n-tilavuus (n-volyymi)

$$vol_n(I_{ab}) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

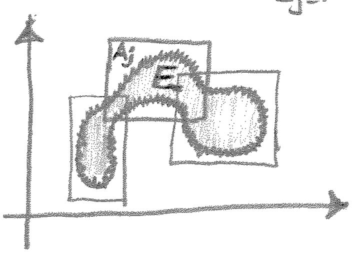
$$vol_n(\emptyset) := 0,$$

$$vol_n(\mathbb{R}^n) := \infty.$$

Lebesgue-ulkomitta $\lambda^*_{\mathbb{R}^n} = vol_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$

syntyy n-tilavuudesta:

$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E) := \inf \{ \sum_{j=1}^{\infty} vol_n(A_j) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\ \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n} \}.$$



Tiedetään aiemman nojalla:

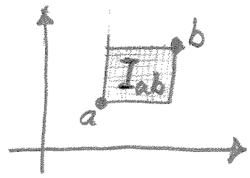
$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}$ on ulkomitta,

$\underbrace{\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})}_{\text{(mitallisten perhe)}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ on σ-algebra

Määr. **Lebesgue-mitta** $\lambda_{\mathbb{R}^n} := \lambda^*_{\mathbb{R}^n}|_{\mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})}$ eli

$$\lambda_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}) \to [0, \infty],$$

$$\lambda_{\mathbb{R}^n}(E) := \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E) \quad (\forall E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})).$$



Lause 4.23

$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(I_{ab}) = vol_n(I_{ab}).$$

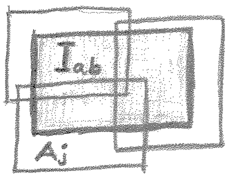
Tod.

"$\leq$" $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$, kun $A_j = \begin{cases} I_{ab}, & \text{jos } j=1, \\ \emptyset, & \text{jos } j>1, \end{cases}$

$$I_{ab} \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j,$$
$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(I_{ab}) \leq \sum_{j=1}^\infty vol_n(A_j) = vol_n(I_{ab}). \boxtimes$$

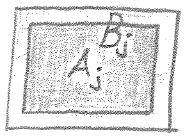
"$\geq$" Ota $\varepsilon > 0$.

Ota $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$, jolle $I_{ab} \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ ja



$$\sum_{j=1}^\infty vol_n(A_j) < \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(I_{ab}) + \varepsilon. \quad \text{"}\varepsilon\text{-tiukka" peite}$$

Ota $\{B_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$, jolle



"väljennys"

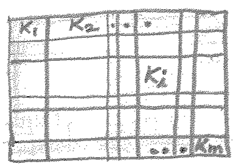
$$\begin{cases} A_j \subset int(B_j), \\ vol_n(B_j) \leq vol_n(A_j) + 2^{-j} \cdot \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^\infty vol_n(B_j) \leq \sum_{j=1}^\infty vol_n(A_j) + \varepsilon$$
$$< \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(I_{ab}) + 2\varepsilon. \quad (*)$$

$\{int(B_j)\}_{j=1}^\infty$ on avoin peite joukolle I_{ab}, joka on kompakti ($\Leftarrow$ Heine-Borel!)

$\Rightarrow \exists$ äärellinen osapeite $\{int(B_{j_k})\}_{k=1}^\ell$.

Pilko I_{ab} sisustoiltaan erillisiksi n-väleiksi K_i (missä $1 \leq i \leq m$) niin, että



"Riittävän pienet palat K_i"

$$\forall i \ \exists B_{j_k} : K_i \subset int(B_{j_k}). \quad (**)$$

$$\Rightarrow vol_n(I_{ab}) = \sum_{i=1}^m vol_n(K_i) \overset{(**)}{\leq} \sum_{k=1}^\ell vol_n(B_{j_k})$$
$$\leq \sum_{j=1}^\infty vol_n(B_j) \overset{(*)}{<} \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(I_{ab}) + 2\varepsilon.$$

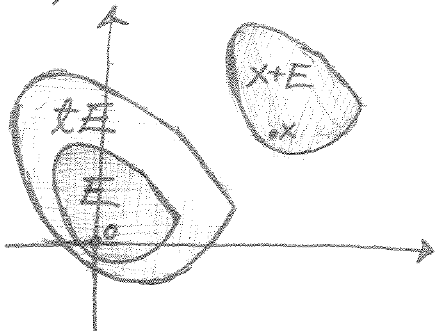
$$\overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} vol_n(I_{ab}) \leq \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(I_{ab}). \blacksquare$$

Tehtävä

Olkoon $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$tE := \{ty \mid y \in E\} \quad \text{ja}$$

$$x + E := \{x + y \mid y \in E\}.$$



Osoita, että

$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(tE) = |t|^n \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E),$$

$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(x+E) = \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E) \quad \text{ja}$$

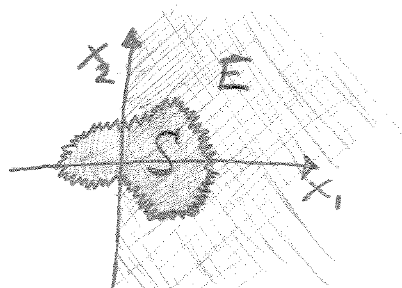
$$E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}) \Rightarrow tE,\ x+E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}).$$

[Lebesgue-mitta säilyy myös $\mathbb{R}^n$:n rotaatioissa.]

Lemma

Olkoon $E := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$ (jollakin $i \in \{1, \dots, n\}$).

Silloin $E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$.



Tod.

[Riittää tapaus $i = 1$.]

Ota $S \subset \mathbb{R}^n$.

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$, jolle $S \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ ja

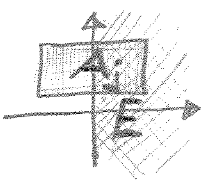
$$\sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(A_j) < \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(S) + \varepsilon.$$

"ε-tiukka peite"

$E \cap S \subset \bigcup_{j=1}^\infty \overbrace{(E \cap A_j)}^{\in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}}$

$E^c \cap S \subset \bigcup_{j=1}^\infty \underbrace{(\overline{E^c} \cap A_j)}_{\in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}}$

$$\Rightarrow \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(S) \overset{\text{triv.}}{\leq} \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E \cap S) + \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E^c \cap S)$$



$$\leq \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(E \cap A_j) + \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(\overline{E^c} \cap A_j)$$

$$\leq \sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(A_j) + \sum_{j=1}^\infty \underbrace{\mathrm{vol}_n(E \cap \overline{E^c} \cap A_j)}_{=0}$$

$$< \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(S) + \varepsilon$$

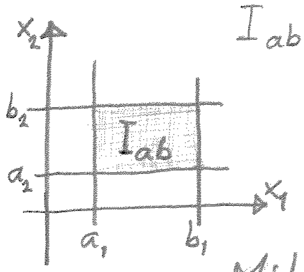
$$\overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(S) = \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E \cap S) + \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E^c \cap S),$$

siten E on $\lambda^*_{\mathbb{R}^n}$-mitallinen. ■

<u>Seuraus</u>

$I_{ab} \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$ ||| Siten $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$.

<u>Tod.</u>



$$I_{ab} = \bigcap_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k \geq a_k\}}_{\text{mitallinen,}} \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k \leq b_k\}}_{\text{mitallinen,}} \Big)$$

ks. Lemma & Tehtävä s. 65.

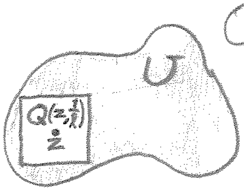
Mitallisten numeroituva leikkaus mitallinen. ∎

(tässä riittäisi äärellinen leikkaus)

<u>Seuraus</u>

$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}$ on Borel-ulkomitta (siis avoin $\Rightarrow$ mitallinen).

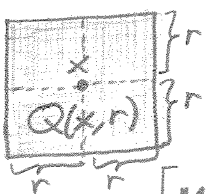
<u>Tod.</u>



Ota $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Väite seuraa, jos näytetään, että

$$U = \bigcup \{ \overline{Q(z, 1/\ell)} \mid z \in \mathbb{Q}^n, \ell \in \mathbb{Z}^+, \overline{Q(z, 1/\ell)} \subset U \}, \quad \circledast$$

missä "kuutio"



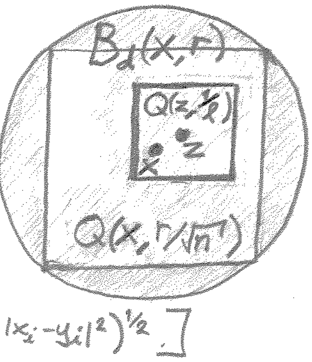
$$Q(x,r) := x +]-r, r[^n$$
$$= \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : |x_i - y_i| < r \}.$$

[<u>Miksi väite seuraisi?</u>
Koska $\overline{Q(z, 1/\ell)}$ on n-väli ja siis mitallinen,
mitallisten joukkojen numeroituva yhdiste on mitallinen,
$\mathbb{Q}^n$ ja $\mathbb{Z}^+$ ovat numeroituvia!]

Ota siis $x \in U$ (tapaus $U = \emptyset$ olisi triviaali).

$\exists r > 0 : B_d(x,r) \subset U$. ||| [$d$ euklidinen metriikka]

Nyt $Q(x, r/\sqrt{n}) \subset B_d(x,r)$. ||| [Todista tämä!]



$$\left.\begin{array}{l} \text{Ota } \ell \in \mathbb{Z}^+ : \ 1/\ell < \frac{1}{2} \cdot r/\sqrt{n}. \\ \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n \text{ tiheä} \Rightarrow \text{ota } z \in \mathbb{Q}^n : d(x,z) \leq \frac{1}{\ell}. \end{array}\right\} \circledast\circledast$$

$$\Rightarrow x \in \overline{Q(z, 1/\ell)} \overset{\circledast\circledast}{\subset} Q(x, r/\sqrt{n}) \subset B_d(x,r) \subset U$$

$\Rightarrow \circledast$ on tosi. ∎

$[d(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{1/2}]$

Miltä $\lambda^*_{\mathbb{R}^n}$-mitalliset joukot "näyttävät"?

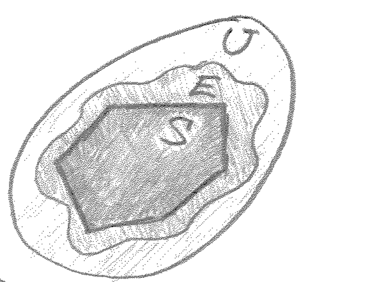
Lebesgue-approksimointilause [GZ 4.26]

Seuraavat ehdot yhtäpitävät:

(i) $E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists U \subset \mathbb{R}^n$ avoin: $E \subset U$, $\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(U \setminus E) < \varepsilon$.

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists S \subset \mathbb{R}^n$ suljettu: $S \subset E$, $\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E \setminus S) < \varepsilon$.

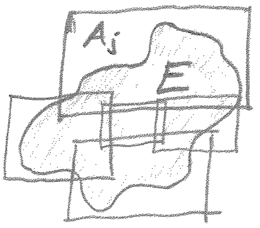


"ε-tiukka alheisjoukkopeite"

Tod.

($i \Rightarrow ii$) Ota $\varepsilon > 0$.

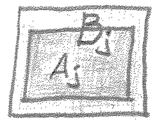
Aluksi tapaus $\boxed{\lambda_{\mathbb{R}^n}(E) < \infty}$:



Ota $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$, jolle $E \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ ja

$$\sum_{j=1}^\infty \mathrm{vol}_n(A_j) < \lambda_{\mathbb{R}^n}(E) + \varepsilon. \quad (*)$$

Ota $\{B_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$, jolle



"väljennys"

$$\begin{cases} A_j \subset \mathrm{int}(B_j), \\ \lambda_{\mathbb{R}^n}(B_j) \leq \lambda_{\mathbb{R}^n}(A_j) + 2^{-j}\varepsilon. \end{cases} \quad (**)$$

$\Rightarrow U := \bigcup_{j=1}^\infty \mathrm{int}(B_j)$ avoin, $E \subset U$,

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}^n}(U) &\leq \sum_{j=1}^\infty \lambda_{\mathbb{R}^n}(B_j) \\ &\overset{(**)}{\leq} \sum_{j=1}^\infty \left(\lambda_{\mathbb{R}^n}(A_j) + 2^{-j}\varepsilon\right) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \lambda_{\mathbb{R}^n}(A_j) + \varepsilon \\ &\overset{(*)}{<} \lambda_{\mathbb{R}^n}(E) + 2\varepsilon \quad (***) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(U \setminus E) &= \lambda_{\mathbb{R}^n}(U \setminus E) \\ &= \lambda_{\mathbb{R}^n}(U) - \underbrace{\lambda_{\mathbb{R}^n}(E)}_{<\infty} \\ &\overset{(***)}{<} \underbrace{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

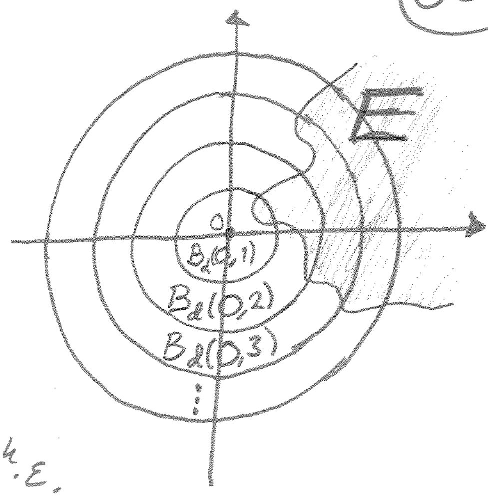
$E \subset U$, E, U mitallisia, $\lambda_{\mathbb{R}^n}(E) < \infty$

Tämä on "yhtä hyvä kuin ε"! Tapaus $\lambda_{\mathbb{R}^n}(E) < \infty$ ok.

...

...

Olkoon nyt $\boxed{\lambda_{\mathbb{R}^n}(E) = \infty}$:



$$E_k := \underbrace{E}_{\text{mitallisia}} \cap \underbrace{B_d(0,k)} \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}),$$

huom. $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $\lambda_{\mathbb{R}^n}(E_k) < \infty$

$$\overset{\text{s.67}}{\Longrightarrow} \exists U_k \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin: } \begin{cases} E_k \subset U_k \\ \lambda_{\mathbb{R}^n}(U_k \setminus E_k) < 2^{-k} \cdot \varepsilon. \end{cases}$$

$U := \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ avoin, $E \subset U$,

$$U \setminus E = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\Big) \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus E)$$

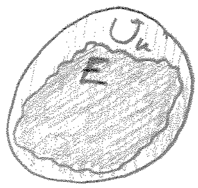
$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus E_k)$$

$$\Rightarrow \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(U \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(U_k \setminus E)$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \cdot \varepsilon = \varepsilon. \quad \boxtimes \ (i \Rightarrow ii)$$

(ii ⇒ i) Nyt

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+ \ \exists U_k \subset \mathbb{R}^n \text{ avoin: } \begin{cases} E \subset U_k \\ \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(U_k \setminus E) < \frac{1}{k}. \end{cases}$$



$$G := \bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{U_k}_{\text{mitallinen}} \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}), \quad E \subset G.$$

$$G \setminus E = \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k\Big) \setminus E = \bigcap_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus E) \subset U_{k_0} \setminus E$$

$$\Rightarrow \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(G \setminus E) \leq \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(U_{k_0} \setminus E) < \frac{1}{k_0} \xrightarrow[k_0 \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lambda^*_{\mathbb{R}^n}(G \setminus E) = 0,$$

joten $G \setminus E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$.

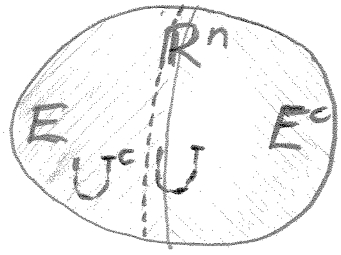
$$\Rightarrow E = G \setminus (G \setminus E) \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}). \quad \boxtimes \ (ii \Rightarrow i).$$

[Tiedetään siis jo: (i ⇔ ii)]

...

...

(i&ii $\Rightarrow$ iii) Olkoon $E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$.



$\Rightarrow E^c \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$

Ota $\varepsilon > 0$.

Ota $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin, jolle

$$E^c \subset U, \quad \lambda_{\mathbb{R}^n}(\underbrace{U \setminus E^c}_{= E \setminus U^c}) < \varepsilon .$$

$S := U^c$ suljettu,

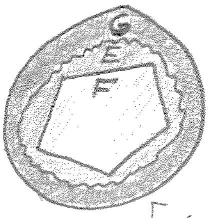
$$S \subset E, \quad \lambda_{\mathbb{R}^n}(E \setminus S) < \varepsilon . \quad \boxtimes \text{ (i\&ii} \Rightarrow \text{iii)}$$

(iii $\Rightarrow$ i) Tämä todistetaan olennaisesti samoin kuin (ii $\Rightarrow$ i) [kokeile toki!], löydetään mm. $F \subset E$, joka on numeroituva yhdiste suljetuista ja jolle

$$\lambda^*_{\mathbb{R}^n}(E \setminus F) = 0. \quad \blacksquare$$

Huom.

Yllä todistuksessa itse asiassa nähdään, että



$$E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n}) \iff \exists\, F, G \text{ Borel-joukot}:$$

$$F \subset E \subset G, \quad \lambda_{\mathbb{R}^n}(G \setminus F) = 0.$$

[ja vieläpä G on avointen numeroituva leikkaus, F on suljettujen numeroituva yhdiste].

Lebesgue-mitallinen joukko on siis "nollamittaista vaille Borel-joukko", ja se "näyttää ulkoa päin melkein avoimelta" (s.67 (ii)), "näyttää sisältä päin melkein suljetulta" (s.67 (iii)).

Nollamittainen joukko on "pieni":

Esim. $\{x\} = I_{xx} \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$, $\lambda_{\mathbb{R}^n}(\{x\}) = 0$.

$\Rightarrow$ Jos $S \subset \mathbb{R}^n$ numeroituva, niin $S \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$ ja

$\lambda_{\mathbb{R}^n}(S) = 0$, koska $0 \leq \lambda_{\mathbb{R}^n}(S) \leq \sum_{x \in S} \lambda_{\mathbb{R}^n}(\{x\}) = 0$.

(huom. numeroituva summa!)

Erityisesti $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ tiheä, jolle $\lambda_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{Q}^n) = 0$.

Cantor-($\frac{1}{3}$-)joukko on ylinumeroituva,

mutta Lebesgue-0-mittainen [harjoitustehtävä!].

Joukolle $E \in \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$ luku $\lambda_{\mathbb{R}^n}(E) \in [0, \infty]$

vastaa mielikuvaa "n-dimensioisesta tilavuudesta".

<u>Huom.</u> [GZ 4.5]

Valinta-aksiooman avulla voidaan "rakentaa"

$E \subset \mathbb{R}^n$, $E \notin \mathcal{M}(\lambda^*_{\mathbb{R}^n})$,

siis ei-Lebesgue-mitallinen joukko.