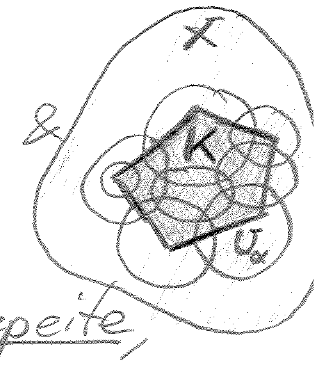
Kompaktius [GZ 3.1, 3.5, 3.7]

[Karkea idea: topologisen avaruuden kompakti osajoukko on "taskukokoinen".]



Määr. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus.
Kokoelma $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$
on joukon $K \subset X$ avoin peite,
jos $\begin{cases} \mathcal{U} \subset \mathcal{T} \ (\text{eli } \forall \alpha \in A: U_\alpha \text{ avoin}) \ \& \\ K \subset \bigcup \mathcal{U} \ \left(= \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right); \end{cases}$
silloin sanotaan, että $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ on osapeite,
jos myös $K \subset \bigcup \tilde{\mathcal{U}}$.
Joukko $K \subset X$ on kompakti ($\mathcal{T}$-kompakti),
jos sen jokaisella avoimella peitteellä
on olemassa äärellinen osapeite!

Huom.
Pohdi äskeistä määritelmää erityisen huolellisesti (sillä tässä usein väärinkäsityksiä)!
Kun $K \subset X$ halutaan näyttää kompaktiksi, otetaan aluksi (mikä tahansa) joukon K avoin peite $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$.
(indeksijoukon A mahtavuutta ei saa kiinnittää!)
Tehtävänä löytää
$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \tilde{A}\},$$
jolle $K \subset \bigcup \tilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{\alpha \in \tilde{A}} U_\alpha$ & $\tilde{A} \subset A$ äärellinen indeksijoukko ($\mathrm{card}(\tilde{A}) < \infty$).

<u>Esim.</u> Olkoon $K \subset X$,

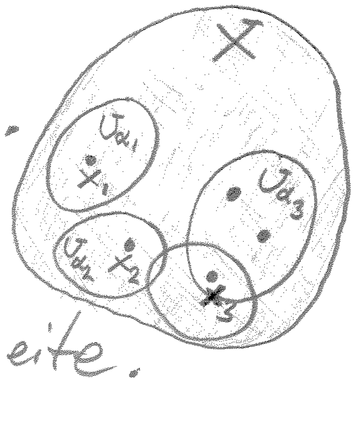
$K = \{x_j \mid j = 1, \dots, n\}$ (äärellinen!).

Osoitetaan K kompaktiksi.

Olkoon $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ K:n avoin peite.

Koska $K \subset \cup\mathcal{U}$ $(= \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha)$, pätee

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \ \exists \alpha_j \in A : \ x_j \in U_{\alpha_j}.$$



Olkoon

$$\hat{\mathcal{U}} := \{ U_{\alpha_j} \mid j = 1, \dots, n \}.$$

Nyt $\hat{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ on äärellinen osapeite.

<u>Esim.</u> Myöhemmin todistetaan, että $K \subset \mathbb{R}^n$ (euklidisessa topologiassa)

kompakti $\iff$ suljettu & rajoitettu

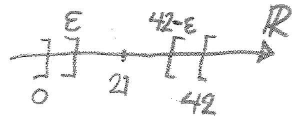
[Heine & Borel -lause].

<u>Huom.</u>

Jos on osoitettava, että $S \subset X$ ei ole kompakti, riittää löytää yksi avoin peite, jolla ei ole äärellistä osapeitettä.

Esim. $S \subset \mathbb{R}^1$ (euklidisessa topologiassa),

$$S =]0, 42[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 42\}.$$



$$\mathcal{U} = \left\{]\tfrac{1}{k}, 42 - \tfrac{1}{k}[\;\middle|\; k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

On joukon S avoin peite $\left( ]0, 42[= \bigcup_{k=1}^{\infty}]\tfrac{1}{k}, 42 - \tfrac{1}{k}[\right)$

mutta mikään äärellinen $\hat{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ ei peitä S:ää

(mieti tätä hetki!).

[Mielikuva: kompakti joukko $K \subset X$ on "saari", jonka avoimessa peitteessä $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ "vihaisen pikkupedon" $\alpha \in A$ "reviirinä" $U_\alpha \in \mathcal{T}$, ja riippumatta "reviirikokoelman" $\mathcal{U}$ valinnasta tarvitaan vain äärellisen monta "petoa" hallitsemaan koko saarta!]

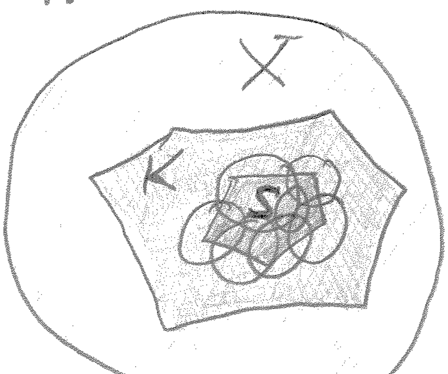
Propositio

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus,

$$S \subset K \subset X,$$

missä S suljettu ja K kompakti.

Silloin S kompakti.



Tod.

Ota joukon S avoin peite

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}.$$

Olkoon

$$\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{\underbrace{X \setminus S}_{\in \mathcal{T},\text{ koska } S \text{ suljettu}}\} \subset \mathcal{T}.$$

Silloin $\mathcal{V}$ on K:n (jopa X:n) avoin peite.

$\overset{K \text{ kompakti}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ äärellinen osapeite $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$.

Olkoon

$$\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{V}} \quad (\text{toki voi olla, että } X \setminus S \in \tilde{\mathcal{V}}).$$

Nyt $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ on S:n äärellinen peite. $\blacksquare$

Lemma

Olkoon $(X,\mathcal{T})$ kompakti topologinen avaruus (eli X $\mathcal{T}$-kompakti).

Jos $S\subset X$ ääretön, niin S:llä on kasautumispiste.

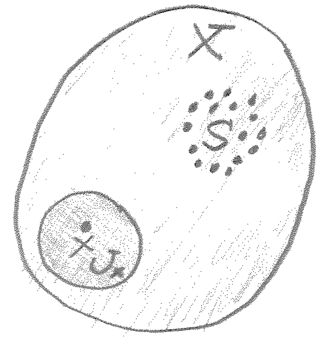
Tod.

$x\in X$ on joukon $S\subset X$ kasautumispiste, jos

$$\forall U\in\mathcal{T}:\ x\in U \Rightarrow (S\cap U)\setminus\{x\}\neq\emptyset.$$

Oletetaan, ettei joukolla S ole kasautumispisteitä:

$$\forall x\in X\ \exists U_x\in\mathcal{T}:\ x\in U_x \ \&\ S\cap U_x\subset\{x\}.$$



Nyt $\mathcal{U}=\{U_x\mid x\in X\}$ on X:n avoin peite

$\xRightarrow{X\text{ kompakti}} \exists\, \tilde{\mathcal{U}}\subset\mathcal{U}$ äärellinen osapeite

$$\Rightarrow S = S\cap\left(\cup\tilde{\mathcal{U}}\right) = \bigcup_{U_x\in\tilde{\mathcal{U}}} \underbrace{(S\cap U_x)}_{\subset\{x\}}$$

$\Rightarrow S$ äärellinen. ■

Lause

Jos $f:X\to Y$ jatkuva, $K\subset X$ kompakti, niin $f(K)\subset Y$ kompakti.

Tod.

Olkoon $\mathcal{V}$ $f(K)$:n avoin peite.

$\Rightarrow \mathcal{U} := \{\underbrace{f^{-1}(\underbrace{V}_{\text{avoin}})}_{\text{avoin, koska } f \text{ jatkuva}} \mid V\in\mathcal{V}\}$ $\underline{K\text{:n avoin peite}}$

$x\in K \Rightarrow f(x)\in f(K) \Rightarrow \exists V\in\mathcal{V}: \underline{f(x)\in V}$
$\Rightarrow x\in f^{-1}(V)$

$\xRightarrow{K\text{ kompakti}} \exists\, \tilde{\mathcal{U}}\subset\mathcal{U}$ äärellinen osapeite,

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{f^{-1}(\underbrace{V_j}_{V_j\in\mathcal{V}}) \mid j=1,\dots,n\}$$

$\tilde{\mathcal{V}} := \{V_j \mid j=1,\dots,n\}\subset\mathcal{V}$ haluttu osapeite!

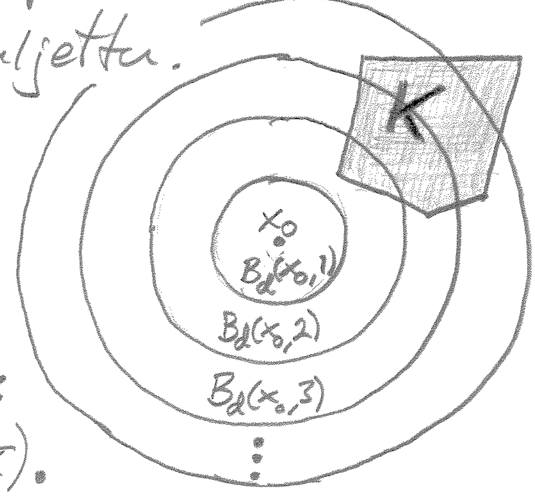
$[y\in f(K) \Rightarrow \exists x\in K: f(x)=y \Rightarrow \exists j: x\in f^{-1}(V_j) \Rightarrow \underline{y=f(x)\in f(f^{-1}(V_j))\subset V_j}]$ ■

Kompaktius metrisessä topologiassa [GZ 3.5, 3.7]

Propositio

Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $K \subset X$ kompakti ($\mathcal{T}_d$-kompakti).

Silloin K on rajoitettu & suljettu.



Tod. [Tapaus $K = \emptyset$ on triviaali!]

(1) Ota $x_0 \in X$.

$\mathcal{U} := \{ B_d(x_0, r) \mid r \in \mathbb{Z}^+ \}$

on joukon K avoin peite:

$B_d(x_0, r) \in \mathcal{T}_d$, $K \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} B_d(x_0, r) \; (= X)$.

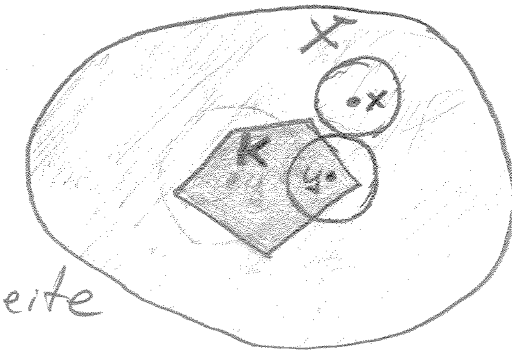
K kompakti $\Rightarrow \exists$ äärellinen osapeite $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$,

$\tilde{\mathcal{U}} = \{ B_d(x_0, r) \mid r \in S \}$ (missä $S \subset \mathbb{Z}^+$ äärellinen!).

$$\Rightarrow K \subset \bigcup \tilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{r \in S} B_d(x_0, r) = B_d(x_0, \underbrace{\max(S)}_{< \infty})$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(K) \leq 2 \cdot \max(S) < \infty .$$ $\boxtimes$ (K rajoitettu).

(2) [Oleta $\emptyset \neq K \neq X$.]



Ota $x \in X \setminus K$.

$\mathcal{V} := \{ B_d(y, \frac{d(x,y)}{2}) \mid y \in K \}$

on kompaktin joukon K avoin peite

$\Rightarrow \exists$ äärellinen osapeite $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$,

$\tilde{\mathcal{V}} = \{ B_d(y_j, \frac{d(x,y_j)}{2}) \mid j = 1, \ldots, n \}$.

Olkoon $r := \min\{ \frac{d(x,y_j)}{2} \mid j = 1, \ldots, n \}$. Silloin

$$B_d(x, r) \cap K \subset \bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{\left[B_d(x,r) \cap B_d(y_j, \tfrac{d(x,y_j)}{2}) \right]}_{= \emptyset} = \emptyset$$

$\Rightarrow x \notin \overline{K}$; siten $K = \overline{K}$ suljettu. ■

Metrisessä topologiassa siis

kompakti $\Rightarrow$ suljettu & rajoitettu,

(mutta $\not\Leftarrow$)

Esim.

Olkoon X ääretön, $d: X\times X \to [0,\infty[$ diskreetti

eli $d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x\neq y, \\ 0, & \text{jos } x=y. \end{cases}$

Nyt $\operatorname{diam}(X) = 1 < \infty$ (rajoitettu)

ja toki $X \subset X$ suljettu.

X ei ole kompakti:

$$\mathcal{U} = \{ \underbrace{B_d(x,1)}_{=\{x\}} \mid x\in X \}$$

on avoin peite, jolla ei äärellistä osapeitettä!

Määr.

Metrinen avaruus on jonokompakti, jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono.

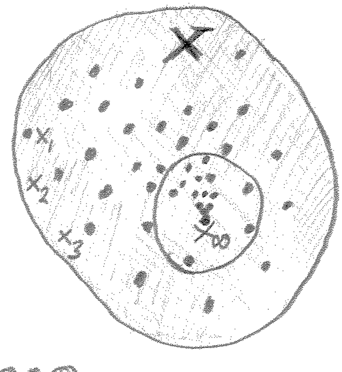
[Tarkemmin:

Jonokompaktissa metrisessä avaruudessa (X,d) voidaan jonosta $(x_k)_{k=1}^\infty$ poimia osajono $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$ (eli $k_j\in\mathbb{Z}^+$, $k_1<k_2<k_3<\ldots$), jolle $x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_\infty$ jollakin $x_\infty\in X$].

Esim. Ääretön diskreetti metrinen avaruus (ks. yllä) ei ole jonokompakti: ota $x_1\in X$ ja $x_{k+1}\in X\setminus\{x_1,\ldots,x_k\}$. Nyt jonossa $(x_k)_{k=1}^\infty$: $k\neq l \Rightarrow d(x_k,x_l) = 1$ — suppenevaa osajonoa ei ole.

Jonokompaktius ≡ metrinen kompaktius:

Lause [GZ 3.33]
Varustetaan (X,d) metrisellä topologialla.
Silloin: $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ kompakti} \\ \Leftrightarrow X \text{ jonokompakti.} \end{array} \right.$



Tod.
Olkoon $X \neq \emptyset$ [$X = \emptyset$ triviaali...].

"$\Rightarrow$" Ota avaruuden X jono $(x_k)_{k=1}^{\infty}$
— tälle löydettävä suppeneva osajono.
Jos joukko $\{x_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ on äärellinen,
niin $\exists\, y \in X$: $x_k = y$ äärettömän monella $k \in \mathbb{Z}^+$,
jolloin haluttu suppeneva osajono

$$(y, y, y, \ldots).$$

Oletetaan, että $S := \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ on ääretön joukko.
Silloin sillä on kasautumispiste $x_\infty \in X$ (ks. Lemma s. 44).
Ota k_1, jolle $x_{k_1} \in S \cap B_d(x_\infty, 1)$.
Kun $k_1, \ldots, k_j$ on valittu,
ota $k_{j+1} > k_j$, jolle $x_{k_{j+1}} \in S \cap B_d(x_\infty, \frac{1}{j})$.
Nyt $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ on haluttu suppeneva osajono:

$$d(x_\infty, x_{k_{j+1}}) < \frac{1}{j} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0,$$

siis $x_{k_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} x_\infty$. $\square$

[**Huom.**
Jonokompaktiuden avulla on helppo näyttää,
että kompakti metrinen avaruus on täydellinen.]

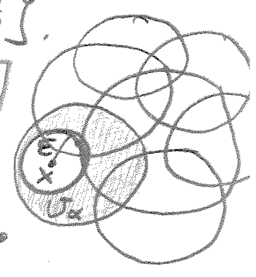
...

...

"⇐" Olkoon (X,d) jonokompakti.

Halutaan näyttää, että X on $\mathcal{T}_d$-kompakti.

Ota siis X:n avoin peite $\mathcal{U}=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}$.



Väite ⊛: $\boxed{\exists \varepsilon>0 \ \forall x\in X \ \exists \alpha\in A:\ B_d(x,\varepsilon)\subset U_\alpha}$

Vastaväite $\tilde{⊛}$: $\forall \varepsilon>0 \ \exists x\in X \ \forall \alpha\in A:\ B_d(x,\varepsilon)\not\subset U_\alpha$.

$\tilde{⊛} \Rightarrow \ \forall k\in\mathbb{Z}^+ \ \exists x_k\in X \ \forall\alpha\in A:\ B_d(x_k,\tfrac{1}{k})\not\subset U_\alpha$.

Jonokompaktius $\Rightarrow$

jonolla $(x_k)_{k=1}^\infty$ on suppeneva osajono $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$,

$x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_\infty \in X$.

Nyt $\exists\alpha_\infty\in A:\ x_\infty\in U_{\alpha_\infty}$.

U_{α_∞} avoin $\Rightarrow \exists\varepsilon>0:\ B_d(x_\infty,\varepsilon)\subset U_{\alpha_\infty}$.

$\Rightarrow B_d(\underbrace{x_{k_j}}_{\to x_\infty},\underbrace{1/k_j}_{\to 0})\subset B_d(x_\infty,\varepsilon)\subset U_{\alpha_\infty}$,

kun j "riittävän suuri"

$\Rightarrow$ ristiriita $\tilde{⊛}$:n kanssa

$\Rightarrow$ ⊛ on tosi.

Ota siis $\varepsilon_0>0$, jolle $\forall x\in X\ \exists\alpha\in A:\ B_d(x,\varepsilon_0)\subset U_\alpha$.

Huom. Kompaktius seuraa, kun todistetaan

Väite ⊛⊛: $\boxed{\text{$X$ voidaan peittää äärellisen monella ε_0-säteisellä avoimella kuulalla.}}$

[MIETI, miksi kompaktius seuraa tästä!]

Vastaväite $\widetilde{⊛⊛}$: Eipäs voida!

Ota $x_1\in X$, $x_{k+1}\in X\setminus\bigcup_{\ell=1}^{k} B_d(x_\ell,\varepsilon_0) \overset{\widetilde{⊛⊛}}{\neq} \emptyset$.

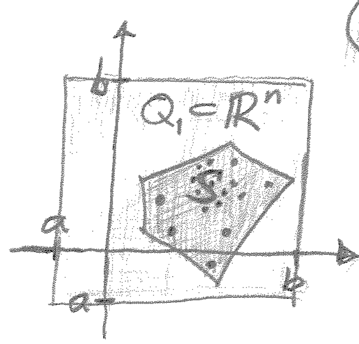
Nyt $k\neq\ell \Rightarrow d(x_k,x_\ell)\geq\varepsilon_0\ (>0)$,

joten jonolla $(x_k)_{k=1}^\infty$ ei suppenevaa osajonoa

— pötyä, sillä (X,d) jonokompakti

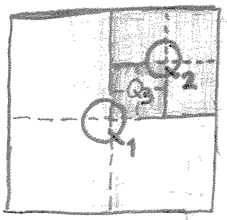
$\Rightarrow \widetilde{⊛⊛}$ epätosi, ⊛⊛ tosi! ■

Seuraus [Heine & Borel, GZ 3.34]
Euklidisessa topologiassa
kompakti $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{suljettu} \\ \text{\& rajoitettu.} \end{cases}$



Tod.
"$\Rightarrow$" on totta kaikissa metrisissä topologioissa (s.45). $\square$

"$\Leftarrow$": Olkoon $S \subset \mathbb{R}^n$ suljettu & rajoitettu.
Osoitetaan S jonokompaktiksi.
Ota joukon S jono $(x_k)_{k=1}^\infty$.
S rajoitettu $\Rightarrow \exists\, a,b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$:
$$S \subset \underbrace{[a,b]^n}_{\text{kuutio, sivun pituus } (b-a)} =: Q_1$$



Kun kuutio Q_j valittu, pilko Q_j
yhdisteeksi kuutioista $Q_{j+1,m}$ (missä $m=1,\ldots,2^n$),
joiden sisustat erilliset ja
sivun pituus $2^{-j}\cdot(b-a)$.
Valitse $Q_{j+1} \in \{Q_{j+1,m} \mid m=1,\ldots,2^n\}$ siten, että
$x_k \in Q_{j+1}$ äärettömän monella $k \in \mathbb{Z}^+$.

Olkoon $k_1 := 1$.
Ota $k_{j+1} > k_j$ siten, että $x_{k_{j+1}} \in Q_{j+1}$.
Nyt $(x_{k_j})_{j=1}^\infty$ on Cauchy-jono, koska
$$\begin{cases} Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots, \\ \mathrm{diam}(Q_{j+1}) = \sqrt{n}\cdot 2^{-j}\cdot(b-a) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0. \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n$ täydellinen $\Rightarrow \exists\, x_\infty \in \mathbb{R}^n$: $x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_\infty$.
S on suljettu $\Rightarrow x_\infty \in S$. $\blacksquare$

Seuraus [GZ 3.44]

Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, $\emptyset \neq K \subset X$ kompakti ja $f: X \to \mathbb{R}$ jatkuva.
Silloin $\exists \max\limits_{x \in K} f(x)$ $\quad$ ($\& \ \exists \min\limits_{x \in K} f(x)$).

Tod.

K kompakti & f jatkuva

$\xRightarrow{\text{Lause s.44}}$ $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakti

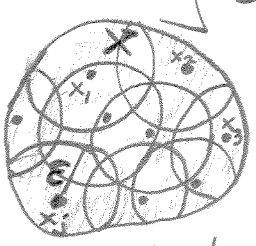
$\xLeftrightarrow{\text{Heine-Borel}}$ $\underbrace{f(K)}_{\neq \emptyset} \subset \mathbb{R}$ suljettu & rajoitettu

$\Rightarrow \sup(f(K)) \in f(K)$

$(\& \ \inf(f(K)) \in f(K))$. ■

Vielä yksi tulkinta metriselle kompaktiudelle:

Määr.
Metrinen avaruus (X, d) on <u>täysin rajoitettu</u>, jos



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{x_j \mid j = 1, \ldots, n\} \subset X:$
$$X = \bigcup_{j=1}^{n} B_d(x_j, \varepsilon).$$

Tässä $n = n_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+$.

Väite:
Metrinen avaruus (X, d) on kompakti

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{täydellinen} \\ \& \text{ täysin rajoitettu.} \end{cases}$

[Lukija voi tämän todistaa
– sivun 47 lauseesta voi olla tässä hyötyä.]