II Topologia & metriikka [GZ 3]

Metriikka [GZ 3.3]

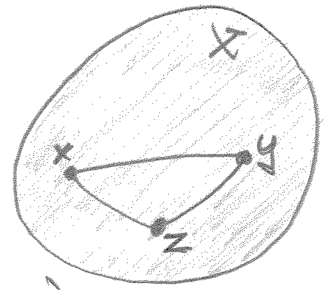
Määr. Kuvaus $d : X \times X \to [0, \infty[$ on metriikka ja (X, d) on metrinen avaruus, jos $\forall x, y, z \in X$:

(1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

"kolmioepäyhtälö"

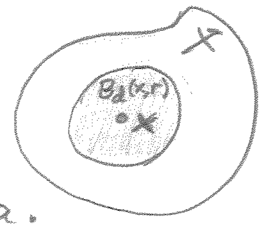


(Idea: $d(x,y)$ on "etäisyys x:stä y:hyn".)

Kun $x \in X$ ja $r > 0$, on

$$B_d(x,r) := \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$$

ns. x-keskinen r-säteinen avoin kuula.

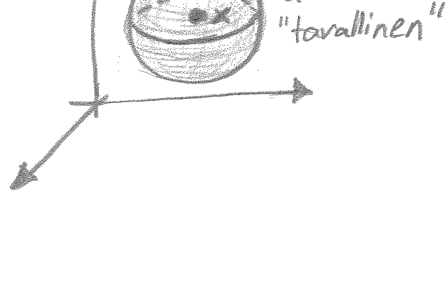


Huom. $X = \bigcup_{r=1}^{\infty} B_d(x,r)$.

Esim. $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$,

$$d(x,y) = \|x - y\| := \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \Big)^{1/2}$$

(euklidinen metriikka, "linnuntie-etäisyys").



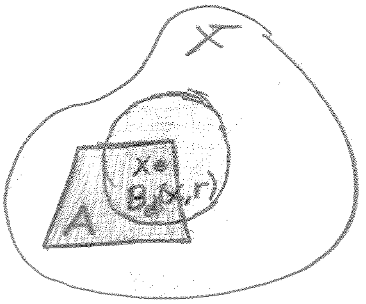
Esim. "Diskreetti metriikka"

$$d : X \times X \to [0, \infty[$$

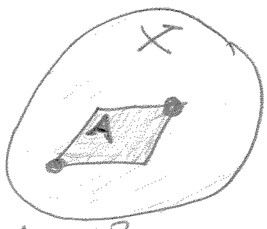
$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{jos } x \neq y, \\ 0, & \text{jos } x = y. \end{cases}$$

Nyt $B_d(x,r) = \begin{cases} X, & \text{jos } 1 < r, \\ \{x\}, & \text{jos } 0 < r \leq 1. \end{cases}$

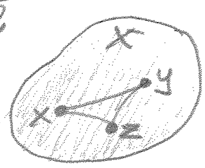
Esim. Jos $A \subset X$ ja $d : X \times X \to [0,\infty[$ metriikka, niin saadaan metriikka ⊛
$$d|_{A\times A} : A \times A \to [0,\infty[\,.$$
Nyt $B_{d|_{A\times A}}(x,r) = A \cap B_d(x,r)$.



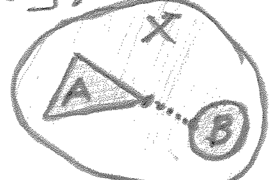
Määr. Joukon $A \subset X$ <u>halkaisija</u> metrisessä avaruudessa (X,d) on
$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\};$$
A on <u>rajoitettu</u>, jos $\mathrm{diam}(A) < \infty$.



Esim.
$$\mathrm{diam}(\{x\}) = 0$$
$$\mathrm{diam}(\{x,y\}) = d(x,y)$$
$$\mathrm{diam}(\{x,y,z\}) = \max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\}$$
$$\mathrm{diam}(B_d(x,r)) \leq 2r.$$
(kolmioepäyhtälöstä...)



Määr. Joukkojen $(\neq\emptyset)$ $A, B \subset X$ välinen <u>etäisyys</u> metrisessä avaruudessa (X,d) on
$$\mathrm{dist}(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

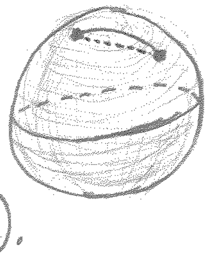


"saaria meressä & lyhin uinti-matka"

Esim.
$$\mathrm{dist}(\{x\},\{y\}) = d(x,y)$$
$$\mathrm{dist}(\{x\},\{y,z\}) = \min\{d(x,y), d(x,z)\}$$
$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{dist}(A,B) = 0$$
$$A \cap B_d(x,r) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{dist}(\{x\},A) < r$$
$$(\ A \cap B_d(x,r) = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{dist}(\{x\},A) \geq r\ )$$

Huom. Voi olla $\mathrm{dist}(A,B) = 0$, vaikka $A \cap B = \emptyset$.

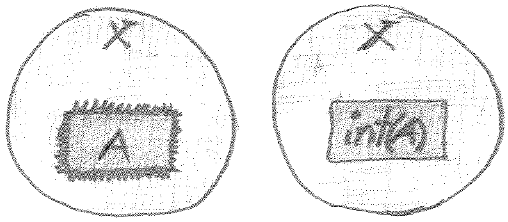
Huom.⊛ Varustetaan avaruus $X = \mathbb{R}^3$ euklidisella metriikalla d, olkoon $A \subset X$ "maapallon pinta". Nyt $d|_{A\times A}$ mittaa esim. matkan Helsinki–Tokio suorinta tietä tunneloitumalla, vaikka A:ssa olisi "luonnollisempaa" mitata etäisyydet "pintaa pitkin" (ei tästä enempää <u>tällä</u> kurssilla).



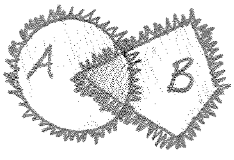
Topologia [GZ 3.1]

Metriikan avulla voitiin puhua pisteiden ja joukkojen etäisyydestä kvantitatiivisesti (dist({x}, A) on luku...). Topologiassa käsitellään etäisyyksiä kvalitatiivisesti; esim. "x on A:n lähellä, kun..."
"x on kaukana A:sta, kun...".

<u>Määr.</u> <u>Avausoperaattori</u> joukossa X on kuvaus $\underline{\mathrm{int}}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$,
(engl. "interior", suom. "sisus")
jolle pätee $\forall A, B \subset X$:

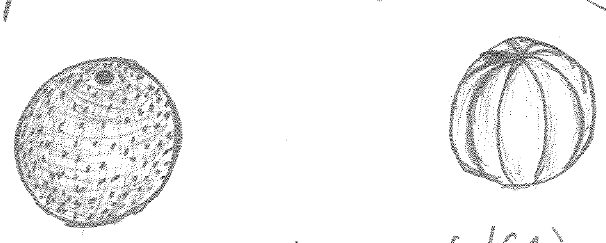


$$\begin{cases} (1) & \mathrm{int}(X) = X. \\ (2) & \mathrm{int}(A) \subset A. \\ (3) & \mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A). \\ (4) & \mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B). \end{cases}$$



Sanotaan, että $\mathrm{int}(A) \subset X$ on joukon $A \subset X$ <u>sisus</u>.

<u>Huom.</u>
Idea yllä:
avausoperaattori "avaa/kuorii" joukot $A \subset X$



$A \mapsto \mathrm{int}(A)$,

A: appelsiini kuorineen

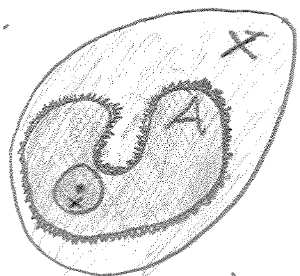
int(A): kuorittu appelsiini (sisus)

<u>Huom.</u> $\mathrm{int}(\emptyset) = \emptyset$, koska $\mathrm{int}(A) \overset{(2)}{\subset} A$.

<u>Esim. 1</u> $\mathrm{int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$
$$A \mapsto A.$$

<u>Esim. 2.</u> $\mathrm{int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$,
$$\mathrm{int}(A) := \begin{cases} X, & \text{jos } A = X, \\ \emptyset, & \text{jos } A \neq X. \end{cases}$$

<u>Lause</u> Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $A \subset X$,
$$\mathrm{int}_d(A) := \{ x \in X \mid \exists r > 0 : B_d(x,r) \subset A \}.$$
Silloin $\mathrm{int}_d : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ on (ns. metrinen) aukiooperaattori.

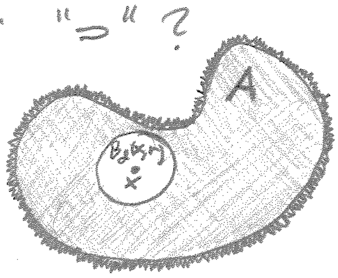


<u>Tod.</u>

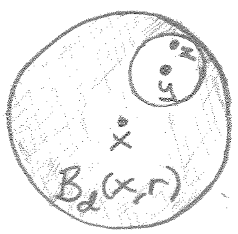
(1) Selvästi $\mathrm{int}_d(X) = X$ (koska $\forall x \, \forall r : B_d(x,r) \subset X$). $\boxtimes_{(1)}$

(2) Selvästi $\mathrm{int}_d(A) \subset A$
(koska $x \in \mathrm{int}_d(A) \Rightarrow \exists r > 0 : x \in B_d(x,r) \subset A$.) $\boxtimes(2)$

(3) On näytettävä $\mathrm{int}_d(\mathrm{int}_d(A)) = \mathrm{int}_d(A)$:
$\mathrm{int}_d(\mathrm{int}_d(A)) \overset{(2)}{\subset} \mathrm{int}_d(A)$. Entä "$\supset$"?



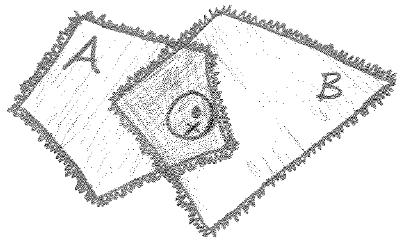
Ota siis $x \in \mathrm{int}_d(A)$.
$\Rightarrow \exists r > 0 : B_d(x,r) \subset A$.



Ota $y \in B_d(x,r)$.
Ota $z \in B_d(y, \underbrace{r - d(x,y)}_{>0})$.

$$d(x,z) \overset{\text{kolmioepäyhtälö}}{\leq} d(x,y) + d(y,z)$$
$$< d(x,y) + (r - d(x,y)) = r$$
$\Rightarrow B_d(y, r - d(x,y)) \subset B_d(x,r) \subset A$,
joten $\forall y \in B_d(x,r) : y \in \mathrm{int}_d(A)$ eli $B_d(x,r) \subset \mathrm{int}_d(A)$
$\Rightarrow x \in \mathrm{int}_d(\mathrm{int}_d(A))$. $\boxtimes(3)$ [Todistus jatkuu...]

(4) On näytettävä $\mathrm{int}_d(A\cap B) = \mathrm{int}_d(A)\cap\mathrm{int}_d(B)$:



"$\subset$" $x\in\mathrm{int}_d(A\cap B)$

$$\Leftrightarrow \exists r>0:\ \underbrace{B_d(x,r)\subset A\cap B}_{\begin{cases}B_d(x,r)\subset A\\ B_d(x,r)\subset B\end{cases}}$$

$\Rightarrow x\in\mathrm{int}_d(A)\cap\mathrm{int}_d(B)$. On näytetty "$\subset$"-suunta.

"$\supset$" Ota $y\in\mathrm{int}_d(A)\cap\mathrm{int}_d(B)$.

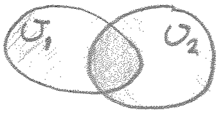
$$\Rightarrow \exists r_A, r_B>0:\ \begin{cases}B_d(y,r_A)\subset A\\ B_d(y,r_B)\subset B\end{cases}$$

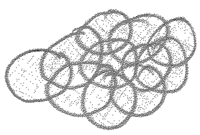
$$\Rightarrow B_d(y,\min\{r_A,r_B\})\subset A\cap B$$

$$\Leftrightarrow y\in\mathrm{int}_d(A\cap B). \quad \blacksquare$$

<u>Huom.</u> On myös ei-metrisiä avausoperaattoreita (ks. Esim. 2 edellisellä sivulla).

<u>Määr.</u> $\mathcal{T}\subset\mathcal{P}(X)$ on joukon X <u>topologia</u> ja $(X,\mathcal{T})$ on <u>topologinen avaruus</u>, jos





(0) $\emptyset, X\in\mathcal{T}$,

(1) $U_1,U_2\in\mathcal{T}\Rightarrow U_1\cap U_2\in\mathcal{T}$,

(2) $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}\Rightarrow\bigcup\mathcal{U}\in\mathcal{T}$.

"$\emptyset, X$ avoimia"

"Kahden avoimen leikkaus avoin"

"Avoimien (mikä tahansa!) yhdiste avoin"

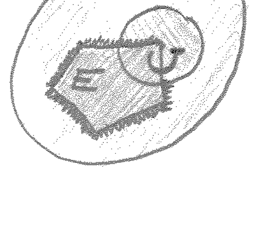
Sanontoja:

$U\in\mathcal{T} \Leftrightarrow U\subset X$ <u>avoin</u> ($\mathcal{T}$-avoin),

$(X\setminus A)\in\mathcal{T} \Leftrightarrow A\subset X$ <u>suljettu</u> ($\mathcal{T}$-suljettu).

<u>Huom.</u> Kun $\mathcal{T}$ on X:n topologia, voidaan $E\subset X$ varustaa topologialla (ns. relatiivitopologia)

$$\mathcal{T}|_E := \{E\cap U \mid U\in\mathcal{T}\}.$$



Lause

Olkoon $\mathrm{int}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ avausoperaattori. Silloin saadaan topologia

$$\mathcal{T}_{\mathrm{int}} := \{\, \mathrm{int}(A) \mid A \subset X \,\}.$$

Tod.

(0) $\emptyset = \mathrm{int}(\emptyset) \in \mathcal{T}_{\mathrm{int}}$.

$X = \mathrm{int}(X) \in \mathcal{T}_{\mathrm{int}}$. $\boxtimes$

(1) $\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) = \mathrm{int}(A \cap B) \in \mathcal{T}_{\mathrm{int}}$. $\boxtimes$

(2) Ota $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_{\mathrm{int}}$. Silloin

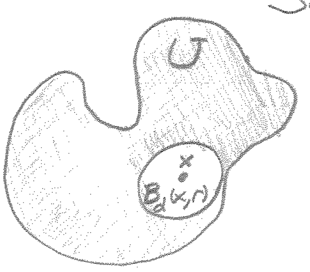
$$\bigcup \mathcal{U} = \mathrm{int}\left(\bigcup \mathcal{U}\right) \in \mathcal{T}_{\mathrm{int}},$$

koska

$$\mathrm{int}\left(\bigcup \mathcal{U}\right) \subset \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \underbrace{U}_{\substack{= \mathrm{int}(U), \\ \text{koska } U = \mathrm{int}(A) = \mathrm{int}(\underbrace{\mathrm{int}(A)}_{U}) \\ \text{jollakin } A \subset X.}} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \underbrace{\mathrm{int}(U)}_{\subset\, \mathrm{int}(\bigcup \mathcal{U})} \subset \mathrm{int}\left(\bigcup \mathcal{U}\right). \blacksquare$$

Määr. Topologia $\mathcal{T}$ on *metristyvä*, jos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathrm{int}_d}$ jollekin metriikalle d.

Huom. Metrinen avaruus (X,d) on usein tapana varustaa "metrisellä topologiallaan" $\mathcal{T}_d := \mathcal{T}_{\mathrm{int}_d}$. Silloin

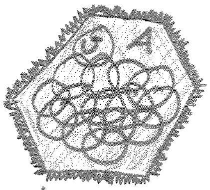


$$U \in \mathcal{T}_d \iff \forall x \in U\ \exists r > 0 : B_d(x,r) \subset U.$$

Lause

Olkoon $\mathcal{T}$ X:n topologia, $A \subset X$,

$$\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) := \bigcup \{ U \in \mathcal{T} \mid U \subset A \}.$$



Silloin $\mathrm{int}_{\mathcal{T}} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ on avausoperaattori.

Tod.

(1) $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(X) = \bigcup \{ U \in \mathcal{T} \mid U \subset X \} \overset{X \in \mathcal{T}}{=} X$. $\boxtimes$

(2) $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) = \bigcup \{ U \in \mathcal{T} \mid U \subset A \} \subset A$. $\boxtimes$

(3) Selvästi $\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) \in \mathcal{T}$ ("avoimien yhdiste avoin") ja $V \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(V) = V$. Siten

$$\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(\underbrace{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A)}_{=: V \in \mathcal{T}}) = \underbrace{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A)}_{V}. \quad \boxtimes$$

(4)
$$\begin{cases} \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A \cap B) \subset \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) \subset A \\ \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A \cap B) \subset \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B) \subset B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A \cap B) \subset \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) \cap \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B) \subset A \cap B$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A \cap B))}_{\overset{(3)}{=} \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A \cap B)} \subset \underbrace{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(\underbrace{\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) \cap \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B)}_{\in \mathcal{T}})}_{= \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) \cap \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B) \text{ (kuten (3):ssa)}} \subset \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A \cap B) = \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) \cap \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(B). \quad \blacksquare$$

Huom! Olkoon $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ X:n topologia ja $\iota : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ avausoperaattori.

$$\begin{cases} \mathrm{int}_{\tau}(A) := \bigcup \{ U \in \tau \mid U \subset A \} & \text{(ks. Lause s. 28).} \\ \mathcal{T}_{\iota} := \{ \iota(A) \mid A \subset X \} & \text{(ks. Lause s. 27).} \end{cases}$$

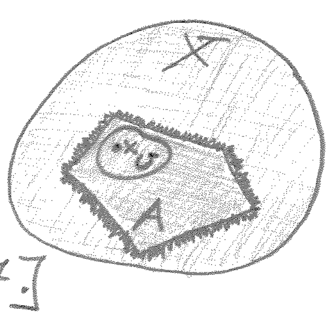
Nyt
$$\begin{cases} A \in \tau \Leftrightarrow A = \mathrm{int}_{\tau}(A), \\ A \in \mathcal{T}_{\iota} \Leftrightarrow A = \iota(A). \end{cases}$$

Siten topologiat & avausoperaattorit kulkevat käsi kädessä (bijektiivinen vastaavuus!).

Olkoon $(X,\mathcal{T})$ topologinen avaruus.

$x\in \mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A)$

$\Leftrightarrow \exists U\in\mathcal{T}: x\in U\subset A.$



[Vertaa metr. topologian tapaukseen, s.27.]

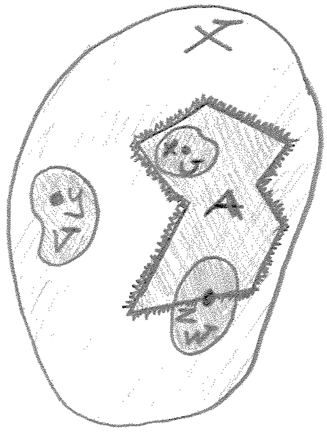
<u>Määr.</u>

$\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A)$ on joukon A <u>sisus</u>.

$x\in\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A)$ on joukon A <u>sisäpiste</u>.

$y\in\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(X\setminus A)$ on joukon A <u>ulkopiste</u>

(eli $\exists V\in\mathcal{T}: y\in V\subset X\setminus A$).



$z\in X$ on joukon A <u>reunapiste</u>,

jos se ei ole A:n sisä- eikä ulkopiste

(eli $\forall W\in\mathcal{T}: z\in W\Rightarrow \begin{cases} W\cap A\neq\emptyset,\\ W\cap(X\setminus A)\neq\emptyset \end{cases}$).

Joukon A <u>reuna</u> ∂A on reunapisteiden joukko.

Joukon A <u>sulkeuma</u> $\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(A)=\overline{A}:=A\cup\partial A$.

"closure"

<u>Huom.</u> Todista, että
$$\begin{cases}\overline{A}=X\setminus\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(X\setminus A),\\ \partial A=\overline{A}\cap\overline{(X\setminus A)},\end{cases}$$

ja että metrisen topologian tapauksessa
$$\overline{A}=\{x\in X\mid \forall r>0:\ A\cap B_d(x,r)\neq\emptyset\}$$
$$=\{x\in X\mid \mathrm{dist}(\{x\},A)=0\}.$$

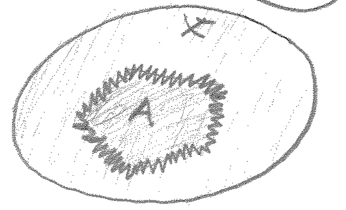
<u>Huom.</u> Topologiassa $\mathcal{T}$ voidaan ajatella, että

$x\in\overline{A}$ "$\Leftrightarrow$" "x lähellä joukkoa A",

$y\notin\overline{A}$ "$\Leftrightarrow$" "y kaukana joukosta A",

$z\in\partial A$ "$\Leftrightarrow$" "z lähellä joukkoja A ja $X\setminus A$".

Huom.



$$\mathrm{int}_{\mathcal{T}}(A) = \bigcup \{U \subset X \mid U \in \mathcal{T},\ U \subset A\},$$
$$\mathrm{cl}_{\mathcal{T}}(A) = \bigcap \{C \subset X \mid X \setminus C \in \mathcal{T},\ A \subset C\}.$$

A:n sisus on suurin A:n sisältämä avoin joukko, A:n sulkeuma on pienin A:n sisältävä suljettu joukko.

Topologiaa voisi avausoperaattorin $\mathrm{int}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ sijasta tutkia <u>sulkeumaoperaattorilla</u>

$$\mathrm{cl}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X),$$

jolta vaaditaan $\forall C, D \subset X$:

(1) $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$,

(2) $C \subset \mathrm{cl}(C)$,

(3) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(C)) = \mathrm{cl}(C)$,

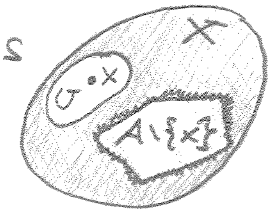
(4) $\mathrm{cl}(C \cup D) = \mathrm{cl}(C) \cup \mathrm{cl}(D)$.

(Vrt. s. 24)

de Morganin haamu

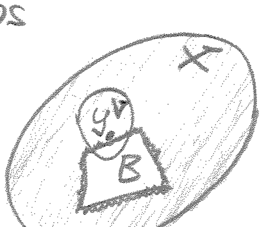
Määr. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. $x \in X$ on joukon $A \subset X$ <u>eristetty piste</u>, jos

$$\exists U \in \mathcal{T}: A \cap U = \{x\}.$$



$y \in X$ on joukon $B \subset X$ <u>kasautumispiste</u>, jos

$$\forall V \in \mathcal{T}: y \in V \Rightarrow (B \cap V) \setminus \{y\} \neq \emptyset.$$

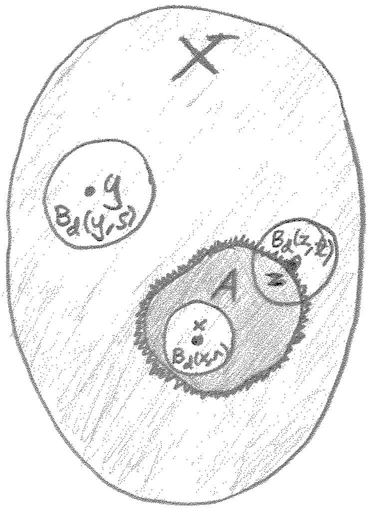


Joukko $E \subset X$ on <u>tiheä</u>, jos

$$\overline{E} = X.$$

$(X, \mathcal{T})$ on <u>separoituva</u>, jos X:llä on numeroituva tiheä osajoukko.

Metrisestä topologiasta [GZ 3.3]



(X, d) metrinen avaruus,
metrinen topologia

$$\mathcal{T}_d = \{\underbrace{\mathrm{int}_d(A)}_{=\{x\in A \mid \exists r>0:\, B_d(x,r)\subset A\}} \mid A \subset X\}.$$

(Ks. aiemmat määritelmät)

x on A:n sisäpiste, kun
$\exists r>0: \quad B_d(x,r) \subset A.$

y on A:n ulkopiste, kun
$\exists s>0: \quad B_d(y,s) \subset X \setminus A.$

z on A:n reunapiste, kun
$\forall t>0: \begin{cases} B_d(z,t) \cap A \neq \emptyset \\ B_d(z,t) \cap (X\setminus A) \neq \emptyset \end{cases}.$

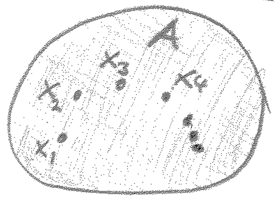
Joukon A reuna

$$\partial A = \{z \in X \mid z \text{ on } A\text{:n reunapiste}\},$$

sulkeuma

$$\begin{aligned} \overline{A} = \mathrm{cl}_{\mathcal{T}_d}(A) &:= A \cup \partial A \\ &= \{x \in X \mid \forall r>0:\, A \cap B_d(x,r) \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in X \mid \mathrm{dist}(\{x\}, A) = 0\}. \end{aligned}$$

$\therefore$ Metrisessä topologiassa joukon A sulkeuma $\overline{A}$ on niiden pisteiden joukko, jotka ovat etäisyydellä 0 joukosta A (eli "lähellä").



<u>Määr.</u> <u>Jono</u> joukossa A on kuvaus

$$x : \mathbb{Z}^+ \to A,$$

merk. $x_k := x(k) \in A$ ja

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+} = (x_k)_{k=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

$$(\neq \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\} \subset A \quad \text{huom!})$$

<u>Määr.</u>

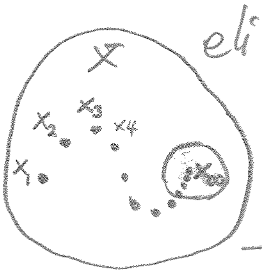
Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

X:n jono $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ <u>suppenee pisteeseen $x_\infty \in X$</u>,

jos $\lim_{k\to\infty} d(x_k, x_\infty) = 0$

eli $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+ : \ k \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_k, x_\infty) < \varepsilon$

$[x_k \in B_d(x_\infty, \varepsilon)$ "suurilla k"$]$



— merk. silloin

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_\infty \quad \text{tai} \quad x_k \to x_\infty \quad \text{tai} \quad x_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} x_\infty \quad \text{tai} \ \ldots$$

<u>Huom.</u>

Jos $\begin{cases} x_k \to x_\infty \\ x_k \to y_\infty, \end{cases}$ niin $x_\infty = y_\infty$:

$$(0 \leq)\ d(x_\infty, y_\infty) \leq \underbrace{d(x_\infty, x_k)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0} + \underbrace{d(x_k, y_\infty)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

$$\Rightarrow d(x_\infty, y_\infty) = 0.$$

[Metrisen avaruuden suppenevan jonon raja-arvo on siis yksikäsitteinen.]

Seuraavan tuloksen nojalla metrinen topologia voitaisiin määritellä jonojen suppenemisen avulla:

<u>Lause</u> Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $x_\infty \in X$, $A \subset X$. Silloin

$$x_\infty \in \overline{A} = cl_{\mathcal{T}_d}(A) \iff \begin{cases} x_k \to x_\infty \text{ jollakin} \\ \text{joukon } A \text{ jonolla } (x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}. \end{cases}$$

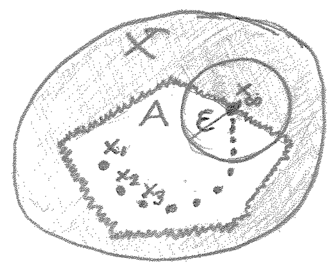
<u>Tod.</u>

"$\Leftarrow$" Olkoon $x_k \to x_\infty$, missä $\forall k: x_k \in A$. Nyt

$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_\varepsilon:\ k \geq k_\varepsilon \Rightarrow x_k \in B_d(x_\infty, \varepsilon)$,

joten $\forall \varepsilon > 0: A \cap B_d(x_\infty, \varepsilon) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow x_\infty \in \overline{A}$. $\boxtimes$



"$\Rightarrow$" Olkoon $x_\infty \in \overline{A}$.

$\iff \forall r > 0: A \cap B_d(x_\infty, r) \neq \emptyset$.

Ota $\forall k \in \mathbb{Z}^+: x_k \in A \cap B_d(x_\infty, \frac{1}{k})$.

Nyt $(x_k)_{k=1}^\infty$ on A:n jono, jolle

$$d(x_k, x_\infty) < \frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow x_k \to x_\infty$. $\blacksquare$

<u>Huom.</u> Vastaavasti metrisen topologian jonotulkinta kasautumispisteelle:

$$\begin{cases} x_\infty \in X \text{ on joukon } A \subset X \text{ kasautumispiste,} \\ \text{jos } x_k \to x_\infty \text{ joillakin } x_k \in A \setminus \{x_\infty\}. \end{cases}$$

Määr. Olkoon (X, d) metrinen avaruus.

Jono $x : \mathbb{Z}^+ \to X$ on Cauchy-jono, jos

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{Z}^+ : \ i, j \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_i, x_j) < \varepsilon.$$

Avaruus (X, d) on täydellinen, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Esim. Täydellinen $(\mathbb{R}, d)$, $d(a,b) := |a-b|$.

Epätäydellinen $(\mathbb{Q}, d|_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}})$: esim.

$$x_k := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \in \mathbb{Q}, \quad (x_k)_{k=1}^{\infty} \text{ Cauchy-jono},$$

$$x_k \xrightarrow{d} x_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

(Neperin luku)

Mielikuva: $\mathbb{R}$ "aukoton täydellinen lukusuora", jossa $\mathbb{Q}$ "tiheä mutta vuotaa kuin seula".

Lemma
Jos $x_k \to x_\infty$, niin $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ on Cauchy-jono.

Tod.
Ota $\varepsilon > 0$. Nyt $x_k \to x_\infty$, joten

$$\exists k_\varepsilon : \quad k \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_k, x_\infty) < \varepsilon.$$

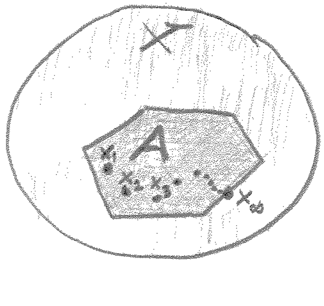
Jos $i, j \geq k_\varepsilon$, niin

$$d(x_i, x_j) \leq \underbrace{d(x_i, x_\infty)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x_\infty, x_j)}_{<\varepsilon}$$

$$< \underbrace{2 \cdot \varepsilon}. \ \blacksquare$$

Huom. Tässä $2\cdot\varepsilon$ (tai vaikka $10^9 \cdot \varepsilon$) on yhtä hyvä kuin ε — mieti, miksi näin on!

Lause 3.24 Olkoon $A \subset X$ ja (X,d) täydellinen.
Silloin $(A, d|_{A\times A})$ täydellinen
$\Leftrightarrow$ $A \subset X$ suljettu.



Tod.

"$\Leftarrow$" Ota Cauchy-jono $(x_k)_{k=1}^\infty$ A:ssa.
(X,d) täydellinen $\Rightarrow \exists x_\infty \in X$: $\underbrace{x_k}_{\in A} \xrightarrow{d} x_\infty$.

A suljettu $\Rightarrow x_\infty \in A$. $\boxtimes$

"$\Rightarrow$" Ota $x_\infty \in \overline{A}$.
Ota $x_k \in A \cap B_d(x_\infty, \frac{1}{k})$ $(\neq \emptyset \ \forall k)$.
Nyt $x_k \xrightarrow{d} x_\infty$
$\overset{\text{ed. Lemma}}{\Longrightarrow}$ $(x_k)_{k=1}^\infty$ on A:n Cauchy-jono
$(A, d|_{A\times A})$ täydellinen $\Rightarrow \exists a_\infty \in A$: $x_k \xrightarrow{d|_{A\times A}} a_\infty$.
Siten $\begin{cases} x_k \xrightarrow{d} x_\infty \\ x_k \xrightarrow{d} a_\infty \end{cases}$
$\Rightarrow x_\infty = a_\infty \in A$; $A = \overline{A}$ suljettu. $\blacksquare$

Huom.
Jos (X,d) epätäydellinen (jothin Cauchy-jonot "vuotavat ulos"), voidaan se (metriikan mielessä olennaisesti yksikäsitteisesti) "tilkitä" täydelliseksi (X^*, d^*); voidaan ajatella, että
$X \subset X^*$ tiheä ja $d^*|_{X\times X} = d$.

(ks. [GZ 3.27]).

Esim. "seulamainen $\mathbb{Q}$ tilkitään täydelliseksi $\mathbb{R}$".

Jatkuvuus [GZ 3.1, 3.3]

Seuraavassa $\mathcal{T}_X$ on joukon X topologia jne.,

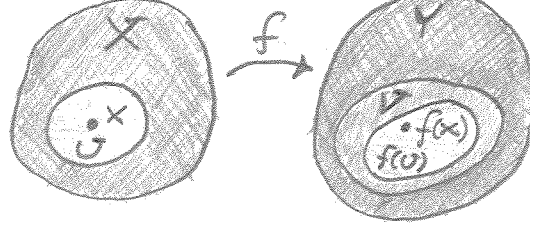
$A \subset X \Rightarrow \overline{A} := cl_{\mathcal{T}}(A)$ $\mathcal{T}_X$-sulkeuma...

Tulkinnat $\begin{cases} x \in \overline{A} : & \text{"}x \in X \text{ on lähellä joukkoa } A \subset X\text{"} \\ y \notin \overline{A} : & \text{"}y \in X \text{ on kaukana joukosta } A \subset X\text{"}. \end{cases}$

__Määr.__ Kuvaus $f : X \to Y$ on $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-__jatkuva pisteessä $x \in X$__, jos

$\forall V \in \mathcal{T}_Y \ \exists U \in \mathcal{T}_X :$

$f(x) \in V,\ x \in U \Rightarrow f(U) \subset V.$



Kuvaus $f : X \to Y$ on $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-__jatkuva__, jos se on jatkuva $\forall x \in X$.

__Tehtävä__

Todista, että $f : X \to Y$ on jatkuva pisteessä $x \in X$

$\Leftrightarrow$ "$(\forall A \subset X)$ jos $x \in X$ on joukon $A \subset X$ lähellä, niin $f(x) \in Y$ on joukon $f(A) \subset Y$ lähellä".

[Jatkuva kuvaus ei voi "repiä" topologista avaruutta. Jatkuva kuvaus voi kylläkin esim. rutistaa avaruuden kasaan: määr. $f : X \to Y$ s.e. $\forall x \in X : f(x) = y_0$ ...]

Metrisen topologian tulkinta jatkuvuudelle:

Tehtävä

Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia, $x_\infty \in X$, $f: X \to Y$. Todista (a)$\Leftrightarrow$(b)$\Leftrightarrow$(c):

(a) f jatkuva x_∞:ssä (metristen topologioiden suhteen).

(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall w \in X$:

$$d_X(x_\infty, w) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_\infty), f(w)) < \varepsilon.$$

(c) $\left(\forall (x_k)_{k=1}^\infty\right): x_k \to x_\infty \Rightarrow f(x_k) \to f(x_\infty)$.

Esim. Muistele matematiikan peruskursseista tuttuja jatkuvia/epäjatkuvia...

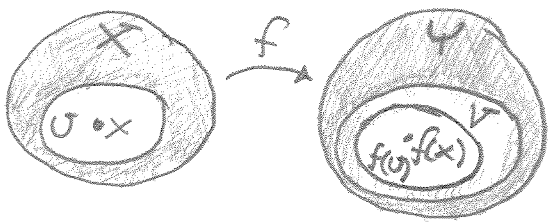
Lause

Olkoon $f: X \to Y$. Silloin

$$\begin{cases} f \text{ jatkuva} \Leftrightarrow \\ \forall V \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X. \end{cases}$$

(Eli "avoimien alkukuvat avoimia" eli "suljettujen alkukuvat suljettuja".) [de Morgan...]

Tod.



"$\Leftarrow$" Ota $x \in X$.

Ota $V \in \mathcal{T}_Y$: $f(x) \in V$.

$U := f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$, $x \in U$,

$f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

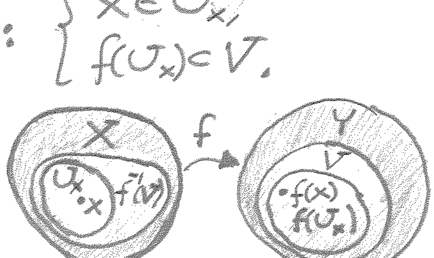
$\Rightarrow f$ jatkuva x:ssä $(\forall x \in X)$. $\boxtimes$

"$\Rightarrow$" Ota $V \in \mathcal{T}_Y$.

f jatkuva $\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(V) \ \exists U_x \in \mathcal{T}_X$: $\begin{cases} x \in U_x, \\ f(U_x) \subset V. \end{cases}$

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \underbrace{U_x}_{\subset f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(V)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \underbrace{U_x}_{\in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{T}_X. \ \blacksquare$$



Seuraus

Jos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ jatkuvia,
niin $X \xrightarrow{g\circ f} Z$ jatkuva.

Tod.
Ota $W \in \mathcal{T}_Z$.

$$(g\circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\in \mathcal{T}_Y}) \in \mathcal{T}_X . \blacksquare$$

Seurauksen seuraus

Olkoot $f, g : X \to \mathbb{R}$ jatkuvia, $c \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{R}$:ssä euklidinen topologia)
Silloin jatkuvia

$c \cdot f,\ f+g,\ f\cdot g,\ |f|,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\}, \ldots$

Jos $g(a) \neq 0$, niin f/g on jatkuva a:ssa.

Todistusidea:
Esim.

$$\left(X \xrightarrow{c\cdot f} \mathbb{R}\right) = \left(X \xrightarrow[\text{jatkuva}]{f} \mathbb{R} \xrightarrow[\text{jatkuva}]{a\mapsto c\cdot a} \mathbb{R}\right),$$

$$\left(X \xrightarrow{f+g} \mathbb{R}\right) = \left(X \xrightarrow[\text{jatkuva}]{x\mapsto (f(x),g(x))} \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}_{\substack{\mathbb{R}^2\text{:ssa} \\ \text{euklidinen topologia}}} \xrightarrow[\text{jatkuva}]{(a,b)\mapsto a+b} \mathbb{R}\right)$$

jne. $\blacksquare$

Huom. Olkoon $f : X \to Y$. Silloin (harjoitustehtävä)

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$

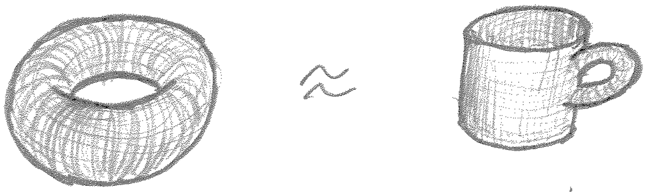
"kunnioittaa joukko-opin operaatioita".
$\Rightarrow$ jos $\mathcal{T}_Y$ on Y:n topologia,
niin saadaan X:n topologia (ns. f-indusoitu topologia)

$$f^{-1}(\mathcal{T}_Y) := \{ f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y \}.$$

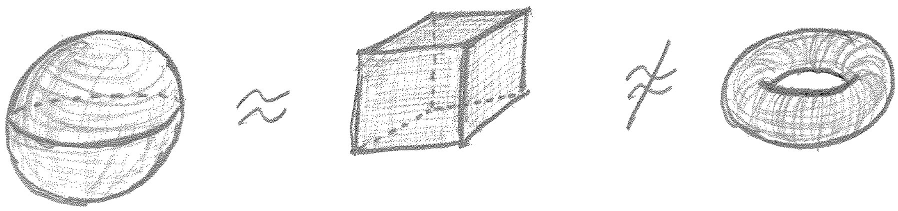
Silloin f on $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-jatkuva
$\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{T}_Y) \subset \mathcal{T}_X$.

Määr. $f: X \to Y$ on **homeomorfismi**,
jos f bijektio, jatkuva & $f^{-1}: Y \to X$ jatkuva.
Merk. silloin $\mathcal{T}_X \approx \mathcal{T}_Y$ (lyhyemmin $X \approx Y$).

Esim. Munkkirinkilä $\approx$ kahvikuppi



(euklidisen topologian mielessä samat, euklidisen metriikan mielessä erilaiset!), vastaavasti

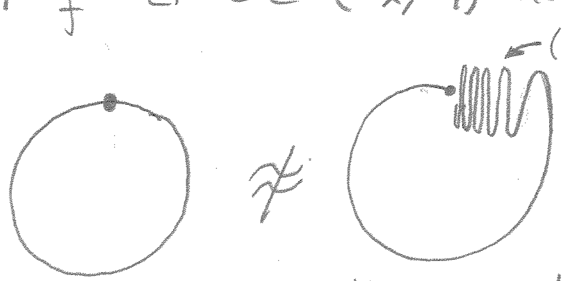


Homeomorfismi siis samaistaa topologian mielessä avaruuksia. Pätee:

$$\begin{cases} X \approx X, \\ X \approx Y \Rightarrow Y \approx X, \\ (X \approx Y \ \& \ Y \approx Z) \Rightarrow X \approx Z. \end{cases}$$

Esim. $f: X \to Y$, $X = Y$, $\mathcal{T}_X \neq \mathcal{T}_Y$, $\forall x \in X: f(x) := x$.
Nyt f ei ole $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-homeomorfismi!

Esim.



tason $\mathbb{R}^2$ euklidisessa relatiivitopologiassa.
Ei homeomorfismia, vaikka jälkimmäiseltä avaruudelta $\exists$ jatkuva bijektio edelliselle!

Metrisissä avaruuksissa voi esittää jatkuvuutta vahvempia luonnollisia vaatimuksia:

<u>Määr.</u> Olkoot (X, d_X), (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia.
Kuvaus $f : X \to Y$ on <u>Lipschitz-jatkuva</u>,
jos
$$\exists C < \infty \ \forall a, b \in X : \ d_Y(f(a), f(b)) \leq C \cdot d_X(a,b).$$
Kuvaus $g : X \to Y$ on <u>tasaisesti jatkuva</u>,
jos
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underbrace{\delta > 0}_{\delta = \delta_\varepsilon} \ \forall a, b \in X : \ d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(g(a), g(b)) < \varepsilon.$$

<u>Huom.</u> $h : X \to Y$ jatkuva, jos
$$\forall a \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underbrace{\delta > 0}_{\delta = \delta_{\varepsilon, a}} \ \forall b \in X : \ d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(h(a), h(b)) < \varepsilon.$$

<u>Tehtävä</u>
Todista (metrisissä topologioissa):
$$\text{Lipschitz-jatkuva} \Rightarrow \text{tasaisesti jatkuva} \Rightarrow \text{jatkuva}.$$
$\not\Leftarrow$ (vastaesimerkit?) $\not\Leftarrow$

<u>Määr.</u> Kuvaus $f : X \to Y$ on <u>isometrinen isomorfismi</u> ("etäisyyden säilyttävä"),
jos se on bijektio, jolle
$$\forall a, b \in X : \ d_X(a,b) = d_Y(f(a), f(b)).$$

(Huom. tällainen f on selvästi $(\mathcal{T}_{d_X}, \mathcal{T}_{d_Y})$-homeomorfismi;
esim. euklidisen avaruuden siirrot ja rotaatiot.
Edellisellä sivulla nähtiin homeomorfismeja,
jotka eivät olleet isometrisiä).