Mat-1.2990

Modernin analyysin perusteet (MODA) $_{5\ op}$

[Ville Turunen] Luennot 2008

Kirja esim.

[GZ] R.F. Gariepy & W.P. Ziemer:
Modern Real Analysis.

Aiheet

I Joukko-oppi
(alkeista äärettömiin, naiivi esitys)

II Topologia & metriikka
(matemaattinen "maantiede & maanmittaus")

III Mittateoria & integrointi
(matemaattinen "punnitseminen")

Aikataulu

I : sivut 2-21, } välikoe nro 1
II : sivut 22-50. }
III : sivut 51-90. } välikoe nro 2

Mat-1.2990
Modernin analyysin perusteet (ModA) $_{5\,\mathrm{op}}$

[Ville Turunen] Luennot 2007
Kirja esim.
[GZ] R.F. Gariepy & W.P. Ziemer:
Modern Real Analysis.

Aiheet

I Joukko-oppi
(alkeista äärettömiin, naiivi esitys)

II Topologia & metriikka
(matemaattinen "maantiede & maanmittaus")

III Mittateoria & integrointi
(matemaattinen "punnitseminen")

Aikataulu

I : viikot 1–2	}	välikoe nro 1.
II : viikot 2–5	}	
III : viikot 6–9	}	välikoe nro 2.

I Joukko-oppi (naiivi versio) [GZ 1–2]

"P" : "P tosi"

"ei P" : "P epätosi"

"P ja Q" : "P tosi ja Q tosi"

"P tai Q" : "P tosi tai Q tosi" (toinen tai molemmat!)

"$P \Rightarrow Q$" : "Jos P tosi, niin Q tosi"

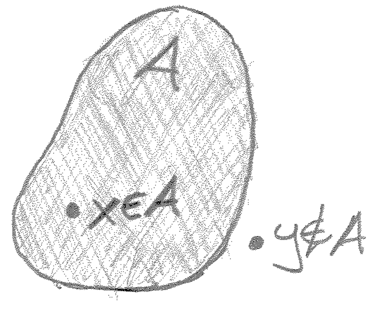
eli "P epätosi tai Q tosi" (Huom!)

"$P \Leftrightarrow Q$" : "$P \Rightarrow Q$ ja $Q \Rightarrow P$"

eli "P:llä ja Q:lla sama totuusarvo".

eli "joko (P&Q tosia) tai (P&Q epätosia)".

Joukot [GZ 1.1]



$x \in A$ "x on joukon A alkio"

$y \notin A$ "y ei ole joukon A alkio"

$\emptyset$ tyhjä joukko:

$$\underbrace{\forall x}_{\text{"kaikilla } x\text{"}} : \ x \notin \emptyset .$$

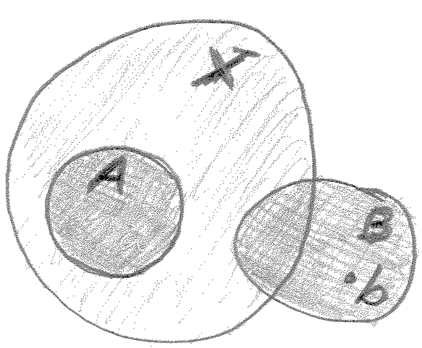
Synonyymejä:

joukko,
perhe,
kokoelma.

③

$A \subset X$ "joukko A on joukon X osajoukko":

$$\forall a \in A : a \in X.$$



$B \not\subset X$ "ei $B \subset X$":

$$\underbrace{\exists\, b}_{\text{"on olemassa } b\text{"}} \in B : b \notin X.$$

$$A = B \iff A \subset B \text{ ja } B \subset A.$$

$$A \neq B \iff \text{ei } A = B.$$

$\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$ "joukon X potenssijoukko".

Siis $A \in \mathcal{P}(X) \iff A \subset X$.

Esim. $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ eli $\emptyset \subset X$

$X \in \mathcal{P}(X)$ eli $X \subset X$.

Esim. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Huom. $\emptyset \in \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Esim. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Esim. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{42\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{42\}\})$

$$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{42\}\}, \{\emptyset, \{42\}\}\}.$$

Huom. $x \neq \{x\} \neq \{\{x\}\} \neq \ldots,$

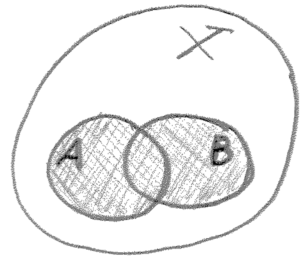
$x \in \{x\} \in \{\{x\}\} \in \ldots.$

[Vrt. "paradoksi" [Russell]:

$X = \{A \mid A \notin A\}$ — onko $X \in X$ vai $X \notin X$?]

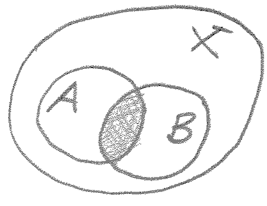
Joukko-operaatioita

Olkoot $A, B \subset X$.



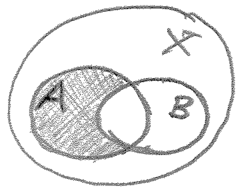
Yhdiste $A \cup B$

$$= \{x \in X \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$



Leikkaus $A \cap B$

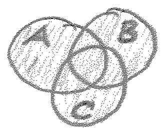
$$= \{x \in X \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

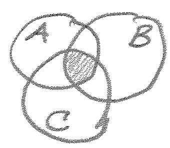


Erotus $A \setminus B$

$$= \{x \in X \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$

Esim. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

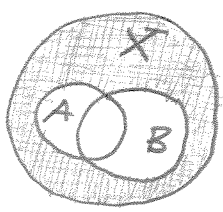


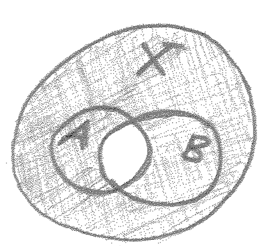


Esim. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

joten näissä voisi sulut jättää pois.





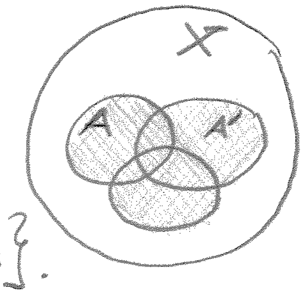
Esim. de Morgan:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

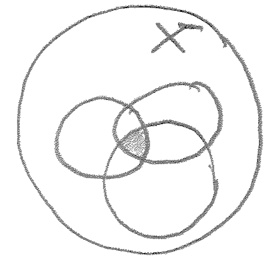
Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$

(siis jos $A \in \mathcal{A}$, niin $A \subset X$).



Perheen $\mathcal{A}$ *yhdiste*

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \in X \mid \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}.$$



Perheen $\mathcal{A}$ *leikkaus*

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \in X \mid \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}.$$

Olkoon $\mathcal{A} = \{A_\alpha \subset X \mid \alpha \in J\}$,

missä joukko J on ns. indeksijoukko.

Perinteisiä merkintöjä:

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha := \bigcup \mathcal{A},$$

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha := \bigcap \mathcal{A}.$$

Jos tässä $J = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

(positiivisten kokonaislukujen joukko),

niin

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} A_k,$$

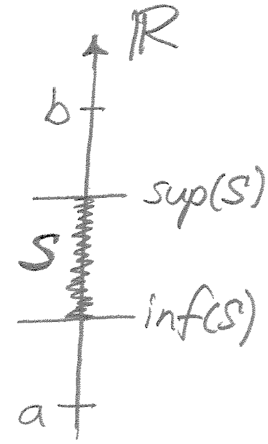
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}^+} A_k.$$

Luvuista [GZ 2.1]

"Tunnetaan" joukot $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ja niiden järjestys $\leq$ ja laskutoimitukset.

Jos $S \subset [a,b] \subset [-\infty,\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$, niin sanotaan, että

$$\begin{cases} b \text{ on joukon } S \text{ } \underline{\text{yläraja}}, \\ a \text{ on joukon } S \text{ } \underline{\text{alaraja}}. \end{cases}$$



"Reaalilukujen suoralla on reikiä nolla" eli $\underline{\mathbb{R}\text{:n täydellisyys}}$: $\forall S \subset \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \exists \sup(S) \in [-\infty,\infty] \ \ \underline{\text{pienin yläraja}} \ \ (\text{supremum}), \\ \exists \inf(S) \in [-\infty,\infty] \ \ \underline{\text{suurin alaraja}} \ \ (\text{infimum}). \end{cases}$$

<u>Esim.</u> $a<b \Rightarrow \begin{cases} \sup(]a,b[) = b \\ \inf(]a,b[) = a \end{cases}$. $\left(\text{Huom. } \begin{cases} \sup(\emptyset) = -\infty, \\ \inf(\emptyset) = +\infty. \end{cases}\right)$

<u>Määr.</u> Olkoon $s_k \in \mathbb{R}$, kun $k \in \mathbb{Z}^+$.

$$\limsup_{k\to\infty} s_k := \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} s_j \quad \left(= \lim_{k\to\infty} \sup\{s_j \mid j \geq k\}\right)$$

$$\left(= \inf_{k\in\mathbb{Z}^+} \sup_{j\geq k} s_j\right),$$

$$\liminf_{k\to\infty} s_k := \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} s_j \quad (= \ldots)$$

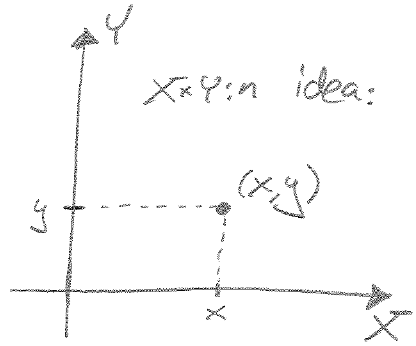
$$\left(= \sup_{k} \inf_{j\geq k} s_j\right).$$

Relaatiot [GZ 1.2, 1.3]

Joukkojen X, Y <u>karteesinen tulo</u>

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

(Huom. $(x,y) \neq (y,x)$ (useimmiten))

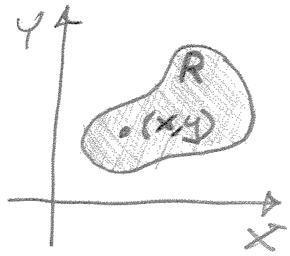


Sanonta:

$R \subset X \times Y$ on <u>relaatio</u>.

$x R y \overset{\text{merk.}}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in R$,

"x on relaatiossa y:hyn".



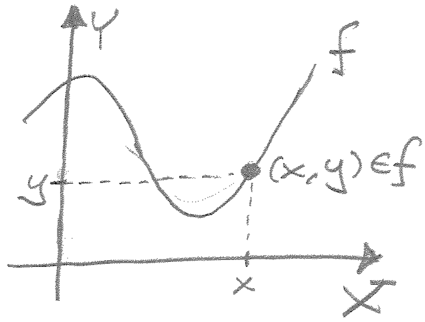
Määr.

<u>Kuvaus</u> eli <u>funktio</u> $f : X \to Y$ (tai $X \xrightarrow{f} Y$) (tai $f \in Y^X$)

on relaatio $f \subset X \times Y$, jolle

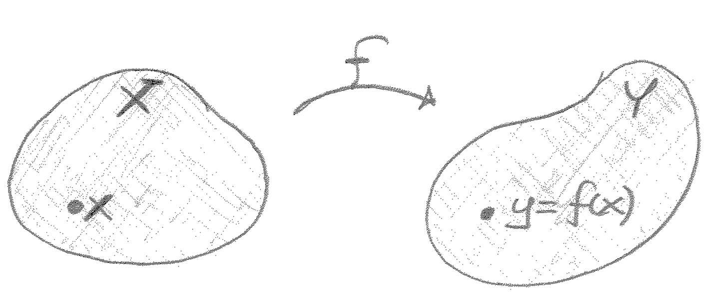
$$\forall x \in X\ \underbrace{\exists!}_{}\ y \in Y : (x,y) \in f.$$

"on olemassa yksikäsitteinen"



Merkitään

$$(x,y) \in f \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

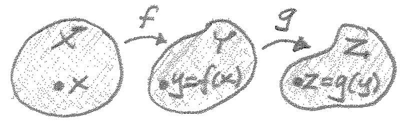


[Idea: f on "sääntö, joka liittää jokaiseen pisteeseen $x \in X$ yhden pisteen $f(x) \in Y$."]

Jos $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$,

niin $X \xrightarrow{g\circ f} Z$ määr. siten, että

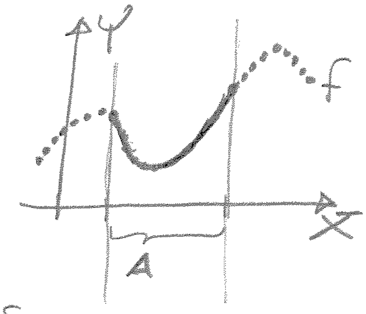
$\forall x \in X: \quad (g\circ f)(x) := g(f(x)).$



($g\circ f : X \to Z$ on <u>yhdistetty kuvaus</u>.)

Kuvauksen $f: X \to Y$ <u>rajoittuma joukkoon</u> $A \subset X$ on kuvaus $f|_A : A \to Y$, jolle

$$\forall x \in A : \quad f|_A(x) := f(x).$$

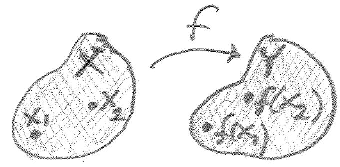


Kuvaus $f: X \to Y$ on <u>surjektio</u>, jos

$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y.$ ["Y peittyy", ks. seur. sivu]

$f: X \to Y$ on <u>injektio</u>, jos

$\forall x_1, x_2 \in X: \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$



$f: X \to Y$ on <u>bijektio</u>, jos se on surjektio & injektio,

jolloin määritellään <u>käänteiskuvaus</u>

$$f^{-1} : Y \to X$$

siten, että

$$\forall (x,y) \in X \times Y : \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

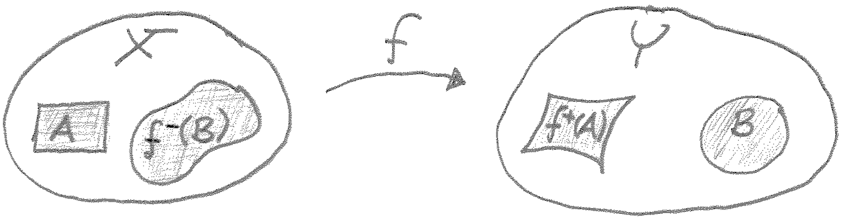
[jolloin voidaan ajatella, että f ja f^{-1} "samaistavat" joukot X ja Y].

Olkoon $f : X \to Y$.

Määr. $f^+ : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$,
$f^- : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$,
siten, että (kun $A \subset X$ ja $B \subset Y$)

$$f^+(A) := \{ f(x) \in Y \mid x \in A \}, \qquad (A\text{:n } \underline{\text{kuva}})$$

$$f^-(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \}. \qquad (B\text{:n } \underline{\text{alkukuva}})$$



Esim. $f : X \to Y$ surjektio $\Leftrightarrow f^+(X) = Y$.

Huom. $f^- : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$
"kunnioittaa joukko-operaatioita":
jos $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ (siis $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \subset Y$),
niin

$$f^-\left(\bigcup \mathcal{B}\right) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^-(B),$$

$$f^-\left(\bigcap \mathcal{B}\right) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} f^-(B),$$

$$f^-(Y \setminus B) = X \setminus f^-(B).$$

(Sitä vastoin $f^+ : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ ei usein kunnioita näitä operaatioita, ks. harjoitukset!)
Tähän ominaisuuteen palataan topologiassa ja mittateoriassa.

Merk. Tavallisesti merkitään

$$f(A) := f^+(A), \qquad f^{-1}(B) := f^-(B).$$

Määr. $\sim \subset X \times X$ on joukon X __ekvivalenssirelaatio__, jos $\forall x,y,z \in X$:

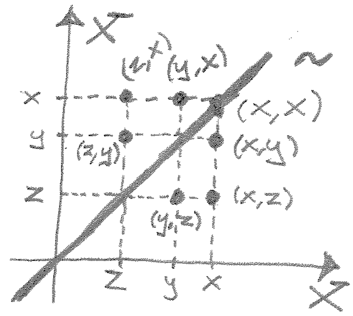
(1) $x \sim x$ (refleksiivisyys)

(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (symmetrisyys)

(3) $x \sim y$ & $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitiivisuus)

Silloin

$$[x] := \{ y \in X \mid x \sim y \}$$



on x:n __ekvivalenssiluokka__

ja

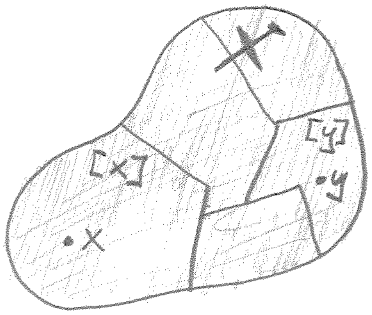
$$X/\sim := \{ [x] \mid x \in X \}$$

on __tekijäavaruus__.

Huom. $x \in [x] \subset X$.

$[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$.

$X = \bigcup_{x \in X} [x]$.



Esim. Määritellään $x \sim y \Leftrightarrow x = y$.
Nyt $\sim$ on ekvivalenssirelaatio, missä
$[x] = \{x\}$ ja $X/\sim = \{ \{x\} \mid x \in X \}$.

Esim. Olkoon X ihmiskunta (kaikkien ihmisten joukko),
$x \sim y \Leftrightarrow$ "x ja y samaa sukupuolta".(*)
[Matti] = [Pentti] ≠ [Tarja] = [Susan],
$X/\sim$ = { [Tarja], [Matti] }
X = [Tarja] ∪ [Matti]

((*) Huom. Yksinkertaisuuden vuoksi oletimme sukupuolia olevan vain kaksi kappaletta...)

<u>Määr.</u> $\leq \subset X \times X$ on joukon $X \neq \emptyset$
<u>(osittais)järjestys</u>, jos $\forall x, y, z \in X$:

(1) $x \leq x$ (refleksiivisyys)

(2) $(x \leq y \;\&\; y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisymmetrisyys)

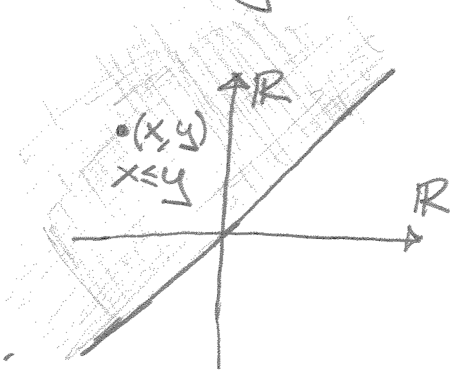
(3) $x \leq y \;\&\; y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiivisuus)

Alkio $x \in X$ on <u>maksimaalinen</u>, jos
$\forall y \in X: \; x \leq y \Rightarrow x = y.$

Osajoukko $K \subset X$ $(K \neq \emptyset)$ on <u>ketju</u>, jos
$\forall x, y \in K: \; x \leq y$ tai $y \leq x$.

Järjestys on <u>täysi</u>, jos koko X on ketju.

<u>Esim.</u> Joukkojen $\mathbb{R}$ ja $[-\infty, +\infty]$ tavallinen järjestysrelaatio $\leq$ on täysi järjestys.



$+\infty \in [-\infty, +\infty]$ on maksimaalinen.
Joukossa $\mathbb{R}$ ei ole maksimaalista alkiota!

<u>Esim.</u> $X = \mathcal{P}(S)$ varustetaan osittaisjärjestyksellä:
$$A \leq B \overset{\text{määr.}}{\Longleftrightarrow} A \subset B.$$

Nyt $S \in \mathcal{P}(S)$ on (ainoa) maksimaalinen alkio.
Tämä järjestys ei (usein) ole täysi — miksi?
Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$,
niin $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ on ketju.

Hyvyydestä [GZ 1.3]

Määr. Olkoon $\leq$ joukon X osittaisjärjestys. Jos $a_0 \in A \subset X$ toteuttaa

$$\forall a \in A: \ a_0 \leq a,$$

sanotaan, että

$$\min(A) := a_0$$

on joukon A minimi.

Järjestys $\leq$ on hyvä (eli on hyvinjärjestys), jos

$$\forall A: \ \emptyset \neq A \subset X \Rightarrow \exists \min(A) \in A.$$

Esim.$^{\circledast}$ Joukon $\mathbb{Z}^+$ tavallinen $\leq$ on hyvä.
Joukkojen $\mathbb{R}$ ja $[-\infty, \infty]$ tavallinen $\leq$ ei ole hyvä, esim. $\nexists \min(\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\})$.

Joukko-oppiin voi halutessaan ottaa aksioomaksi (perusoletus!) seuraavan oletuksen:

(HJP) Hyvän järjestyksen periaate:
Jokainen $X \neq \emptyset$ voidaan hyvinjärjestää!

Onko tämä oletus mielestäsi uskottava? (Vrt. Esim.$^{\circledast}$)
(Älä käytä, jos et halua!)

Huom.
Joukon $X = \mathbb{Z}^+$ tapauksessa

$$HJP(\mathbb{Z}^+) \Leftrightarrow \text{induktioperiaate}$$

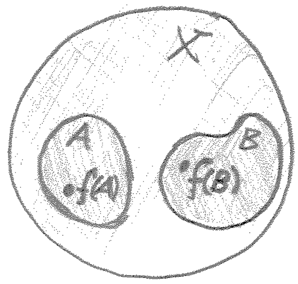
(ks. esim. Lukuteorian kurssi tai todista itse!)

Valinnoista [GZ 1.3]

Joukko-oppiin voi halutessaan ottaa aksioomiksi mm. seuraavia:

(VA) Valinta-aksiooma:

$$\begin{cases} \forall X \neq \emptyset \ \exists f : \mathcal{P}(X) \to X : \\ \qquad \emptyset \neq A \subset X \Rightarrow f(A) \in A. \end{cases}$$

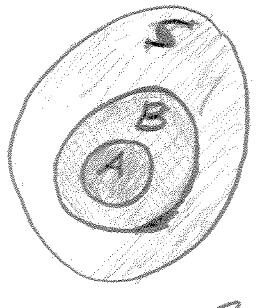


(Tulkinta: f on ns. valintafunktio, joka "poimii" alkion $f(A)$ joukosta A.
Huom: f "poimii" kaikista $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ kerralla!)

Onko (VA) uskottava? (Ei ole pakko uskoa.)

(Hausdorff) Hausdorffin maksimaalisuusperiaate:

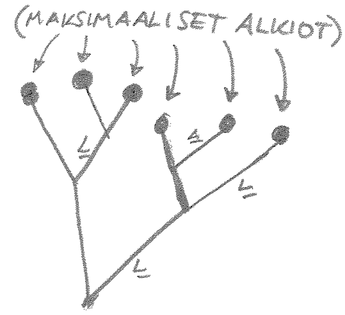
{ Jokainen ketju sisältyy johonkin maksimaaliseen ketjuun.



(Mieti esim. sivun 11 esimerkkiä osittaisjärjestyksestä $X = \mathcal{P}(S)$.) Uskottava vai ei?

(Zorn) Zornin lemma (Zornin periaate):

Jos jokaisella ketjulla $K \subset X$ on yläraja $x_K \in X$ (eli $\forall y \in K : y \leq x_K$), niin X:ssä on maksimaalinen alkio.



(Mieti oheista puumaista osittaisjärjestystä, jossa alkiot kasvavat tyvestä latvaan)

Luennoilla 24.1.2007 äänestettiin
valinta-aksiooman (VA) ja
hyvän järjestyksen periaatteen (HJP) "totuudesta".
Annetut 30 ääntä jakaantuivat seuraavasti:

	(HJP) tosi	(HJP) epätosi
(VA) tosi	8	16
(VA) epätosi	3	3

Itse asiassa $(VA) \Leftrightarrow (HJP)$,
siis otettava $\left\{ \begin{array}{l} \text{joko molemmat} \\ \text{tai ei kumpaakaan!} \end{array} \right.$

Pätee

$$(VA) \Leftrightarrow (\text{Hausdorff}) \Leftrightarrow (\text{Zorn}) \Leftrightarrow (HJP).$$

(ks. esim. P. Suppes: Axiomatic Set Theory).

Mahtavuus (Kardinaliteetti) [GZ 2.2]

(Idea: joukon A mahtavuus eli kardinaliteetti card(A) on "alkioiden lukumäärä".)

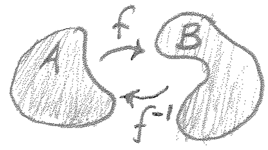
Määr. $\mathrm{card}(\emptyset) := 0$

$\mathrm{card}(\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid k \leq n\}) = \mathrm{card}(\{1, \dots, n\}) = n \in \mathbb{Z}^+$.

Olkoot $A, B \neq \emptyset$. Silloin määr.

$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$ (tai $A \sim B$)

$\overset{\text{määr.}}{\Longleftrightarrow} \exists$ bijektio $f : A \to B$.



$\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$

$\overset{\text{määr.}}{\Longleftrightarrow} \exists B' \subset B : \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B')$. ⊛

$\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$

$\overset{\text{määr.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B) \text{ ja} \\ \underline{\text{ei}}\ \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B). \end{cases}$

Sanontoja:

A on <u>äärellinen</u>, jos $A = \emptyset$ tai $\mathrm{card}(A) = n \in \mathbb{Z}^+$, jolloin $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

A on <u>ääretön</u>, jos ei äärellinen.

A on <u>numeroituva</u>, jos $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(\mathbb{Z}^+)$,

jolloin $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$
$= \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ ‖ voi olla äärellinen tai ääretön!

A on <u>ylinumeroituva</u>, jos ei numeroituva.

Huom.⊛ $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B) \Leftrightarrow \exists$ injektio $f : A \to B$.

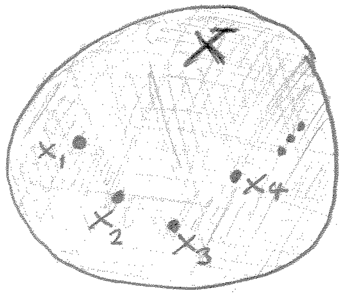
Huom. $A \sim A$, $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$,
$A \sim B \ \&\ B \sim C \Rightarrow A \sim C \dots$

Seuraavan tuloksen mukaan $\mathrm{card}(\mathbb{Z}^+)$ on pienin ääretön mahtavuus:

Propositio 2.32

Jos X on ääretön joukko, niin $\mathrm{card}(\mathbb{Z}^+) \leq \mathrm{card}(X)$.

Tod.



Ota $x_1 \in X$ (ok, sillä $X \neq \emptyset$).

Olkoon $A_n := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ valittu.

Ota $x_{n+1} \in X \setminus A_n$

(tämä onnistuu, koska X ääretön & A_n äärellinen)

Määr. $f: \mathbb{Z}^+ \to X$ siten, että

$$f(n) := x_n.$$

Selvästi f injektio. $\blacksquare$

Huom.

Yllä todistuksessa käytettynä induktio (eli "$\mathbb{Z}^+$:n hyvän järjestyksen periaate" eli "$\mathbb{Z}^+$:n valinta-aksiooma").

Esim. Määr. $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ s.e.

$$f(k) := \begin{cases} \frac{k-1}{2}, & \text{jos } k \text{ pariton}, \\ -k/2, & \text{jos } k \text{ parillinen}. \end{cases}$$

f bijektio, joten $\mathrm{card}(\mathbb{Z}^+) = \mathrm{card}(\mathbb{Z})$.

Seuraavan tuloksen mukaan
ei ole suurinta mahtavuutta:

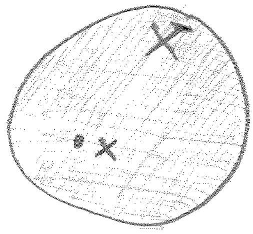
Lause 2.31

$$\operatorname{card}(X) < \operatorname{card}(\mathcal{P}(X)).$$

Tod. Oletus: $X \neq \emptyset$.

"$\leq$" Määritellään $f : X \to \mathcal{P}(X)$ siten, että

$$f(x) := \{x\}.$$



Selvästi f on injektio. $\square$

"$\neq$" Vastaoletus:

$$\exists \text{ bijektio } g : X \to \mathcal{P}(X). \quad \circledast$$

Olkoon

$$A := \{x \in X \mid x \notin g(x)\}.$$

Olkoon

$$x_0 := g^{-1}(A) \in X.$$

Nyt

$$x_0 \in A \iff x_0 \notin \underbrace{g(x_0)}_{= g(g^{-1}(A)) = A} \quad ↯$$

Siis $\circledast$ pötyä. $\blacksquare$

Huom. Yllä todistuksessa oletettiin, että $X \neq \emptyset$.
Tapaus $X = \emptyset$ on vielä tarkastettava:

$$\begin{cases} \operatorname{card}(\emptyset) = 0 \\ \operatorname{card}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \operatorname{card}(\{\emptyset\}) = 1, \end{cases} \quad 0 < 1. \;\checkmark.$$

Toki (?) pätee:

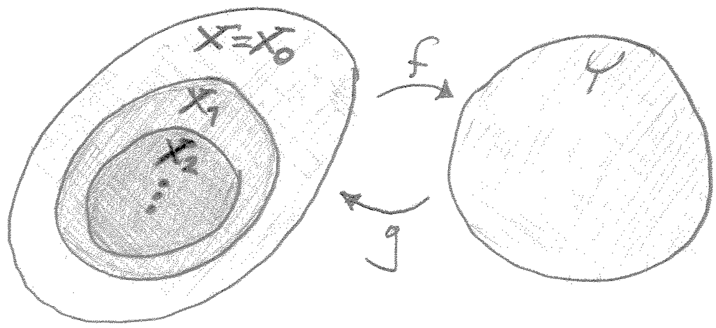
Lause 2.24 [Schröder – Bernstein]

Jos $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y)$ ja
$\operatorname{card}(Y) \leq \operatorname{card}(X)$,
niin $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$.

Tod.

Olkoot $\begin{cases} f : X \to Y \\ g : Y \to X \end{cases}$

injektioita.



Olkoon

$$\begin{cases} \begin{cases} X_0 := X \\ X_1 := g(Y) \end{cases} \\ X_{k+2} := g(f(X_k)) \qquad (\text{missä } k \geq 0) \\ X_\infty := \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k \end{cases}$$

Nyt

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots,$$

$$X_k \supset X_\infty \quad (\forall k \in \mathbb{Z}^+),$$

$$X = X_\infty \cup \dot{\bigcup_{k=0}^{\infty}} \underbrace{(X_k \setminus X_{k+1})}_{\sim \begin{cases} X_0 \setminus X_1, & \text{jos } k \text{ parillinen,} \\ X_1 \setminus X_2, & \text{jos } k \text{ pariton.} \end{cases}} .$$

$$\Rightarrow X \sim X_\infty \cup \dot{\bigcup_{l=1}^{\infty}} (X_l \setminus X_{l+1})$$

$$= X_1 = g(Y) \sim Y$$

$$\Rightarrow X \sim Y. \quad \blacksquare$$

Numeroituvien joukkojen numeroituva yhdiste on numeroituva:

Propositio 2.25

Jos $\forall k \in \mathbb{Z}^+ : \ \operatorname{card}(A_k) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Z}^+)$,

niin $\operatorname{card}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Z}^+)$.

Tod. (Voidaan olettaa, että $\forall k : A_k \neq \emptyset$.)

$$A_1 = \{a_{11}, \ a_{12}, \ a_{13}, \ a_{14}, \ \ldots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, \ a_{22}, \ a_{23} \ \ a_{24}, \ \ldots\}$$
$$A_3 = \{a_{31}, \ a_{32}, \ a_{33}, \ a_{34}, \ \ldots\}$$
$$A_4 = \{a_{41}, \ a_{42}, \ a_{43}, \ a_{44}, \ \ldots\}$$
$$\vdots$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{a_{11}, \ a_{21}, a_{12}, \ a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \ \ldots\} \quad \blacksquare$$

Seuraus: $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.

Tod. $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\frac{a}{k} \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow \operatorname{card}(\mathbb{Z}^+) \leq \operatorname{card}(\mathbb{Q}) \overset{\text{Prop. 2.25}}{\leq} \operatorname{card}(\mathbb{Z}^+)$

$\Rightarrow \operatorname{card}(\mathbb{Z}^+) = \operatorname{card}(\mathbb{Q})$. $\blacksquare$

Mikä onkaan joukon $\mathbb{R}$ mahtavuus? (20.)

<u>Lause 2.30</u>

$$\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)).$$

<u>Tod.</u>

"$\leq$" Määr. $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ siten, että

$$f(x) := \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

f on injektio

$$\Rightarrow \mathrm{card}(\mathbb{R}) \leq \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Q})) \quad \mathrm{card}(\mathbb{Q}) \overset{\text{Prop. 2.25}}{=} \mathrm{card}(\mathbb{Z}^+)$$

$$= \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)). \quad \boxtimes$$

"$\geq$" Määr. $g : \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+) \to \mathbb{R}$ siten, että

$$g(A) := \sum_{k \in A} 10^{-k}$$

(esim. $g(\emptyset) = 0$

$g(\mathbb{Z}^+) = 0{,}111111\ldots$

$g(\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid k \text{ parillinen}\}) = 0{,}01010101\ldots$)

g injektio

$$\Rightarrow \mathrm{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R}). \quad \boxtimes$$

"$\leq$" & "$\geq$" & Schröder–Bernstein $\Rightarrow$ ■

Erityisesti siis $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.
Onko "pienempiä" ylinumeroituvia?

Voidaan osoittaa:
$\exists$ "pienin" Ω s.e. $\mathrm{card}(\mathbb{Z}^+) < \mathrm{card}(\Omega)$.

Lause 2.30 $\Rightarrow$ $\mathrm{card}(\Omega) \leq \mathrm{card}(\mathbb{R})$.

(KH) <u>Kontinuumihypoteesi:</u>
$$\mathrm{card}(\Omega) = \mathrm{card}(\mathbb{R}).$$

(David Hilbert esitti tämän oletuksen v. 1900.)

(ZF): Zermelo-Fraenkel -aksiomatiikka joukko-opille.
(VA): Valinta-aksiooma.
(KH): Kontinuumihypoteesi.

Kurt Gödel (alkaen 1930-luvulta) ja
Paul Cohen (1960-luvulla) selvittivät:
- (ZF):n ristiriidattomuutta ei voi todistaa (ZF:ssä) [Gödel].
- Jos (ZF) ristiriidaton,
  niin (ZF & VA & KH) ristiriidaton [Gödel].
- (VA) ei riipu (ZF):stä [Cohen].
- (KH) ei riipu (ZF&VA):sta [Cohen].

Valinta-aksioomaa tarvitaan
"tekemään äärettömän monta asiaa kerralla"
— $\mathbb{Z}^+$-tapauksessa kyseessä tavallinen induktioperiaate,
mutta se ei riitä <u>ylinumeroituvissa</u> tapauksissa,
jolloin tarvitaan <u>transfiniittinen induktioperiaate:</u>
($\Leftrightarrow$ (VA)):

Olkoon X <u>hyvinjärjestetty</u> ja $B \subset X$, jolle
$$\forall x \in X: \{y \in X \mid y < x\} \subset B \Rightarrow x \in B.$$
Silloin $B = X$.

Seuraava tulos on ekvivalentti valinta-aksiooman kanssa:

Lause

Olkoot $X, Y \neq \emptyset$ joukkoja.
Silloin $\begin{cases} \mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y) & \text{tai} \\ \mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(X). \end{cases}$

Tod.

Olkoon
$$\mathcal{I} := \{ f \mid A \subset X,\ f: A \to Y \text{ injektio} \}.$$
Osittaisjärjestys $\mathcal{I}$:ssä:
$$f \leq g \overset{\text{määr.}}{\Longleftrightarrow} f \subset g \quad \text{/// Huom. } f, g \subset X \times Y$$
Jos $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ ketju, niin sen (eräs) yläraja on
$$\bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{I}.$$
$\xRightarrow{\text{Zornin lemma}}$ $\exists f \in \mathcal{I}$ maksimaalinen, $f: A \to Y$ injektio.

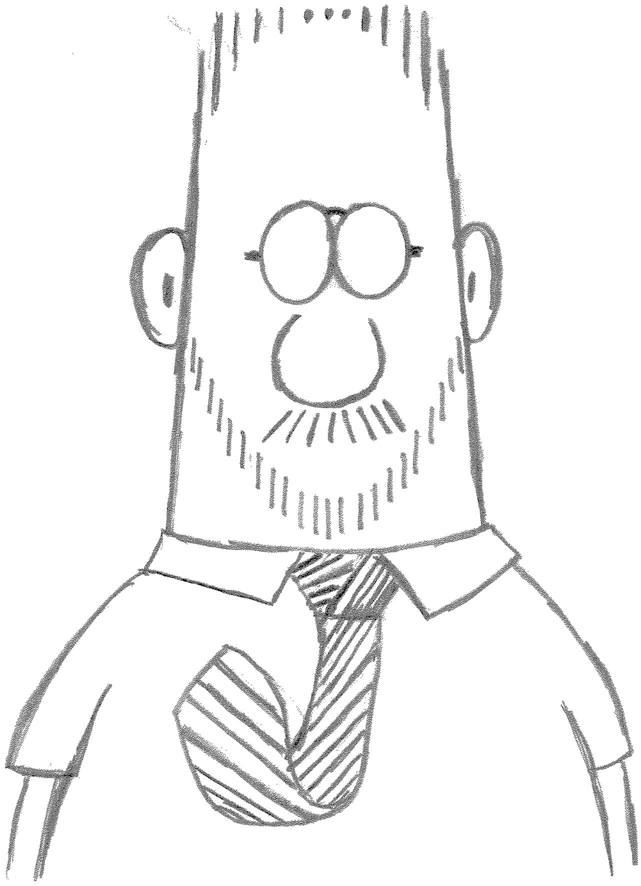
Jos $A = X$, niin $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$
Jos $f(A) = Y$, niin $\mathrm{card}(Y) \overset{f \text{ inj.}}{=} \mathrm{card}(A) \overset{A \subset X}{\leq} \mathrm{card}(X)$.

Vastaoletus: $A \neq X$ & $f(A) \neq Y$. $\circledast$
$\Rightarrow$ $\exists x_0 \in X \setminus A$ & $\exists y_0 \in Y \setminus f(A)$.

Määr. $g: A \cup \{x_0\} \to Y$ siten, että
$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in A, \\ y_0, & \text{kun } x = x_0. \end{cases}$$
Nyt $g \in \mathcal{I}$ ja $f \leq g \neq f$ ↯ (sillä f maksimaalinen)

$\Rightarrow \circledast$ väärä. ∎

D. Hilbert



Hilbertin hotelli

Hotellissa huoneet nro $k \in \mathbb{Z}^+$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$,

kaikki huoneet täynnä.

a) Saapuu yksi uusi vieras, joka majoitetaan huoneeseen nro 1, kun vanhat vieraat siirtyvät: $k \mapsto k+1$.

b) Saapuu uusien vieraiden joukko $U \sim \mathbb{Z}^+$,
Vanhat vieraat siirtyvät: $k \mapsto 2k$. ⊛
Uudet vieraat: $k \mapsto 2k-1$.

⊛: 1 2 3 4 ...
1 2 3 4 5 6 7 8 ...