Mat-1.3621 Tilastollinen päättely

9. harjoitukset / Tehtävät

Aiheet: Bayeslaiset menetelmät

Avainsanat:

Bayesin kaava, Bayeslainen lähestymistapa, Bayeslainen optimaalisuus, Bayes-uskottavuus, Diskreetti jakauma, Ehdollinen jakauma, Ehdollinen todennäköisyys, Ennakkotieto, Epäinformatiivinen priorijakauma, Epäoleellinen priorijakauma, Estimaattori, Estimointi, Frekvenssitulkinta, Frekventistinen lähestymistapa, Hylkäysalue, Jatkuva jakauma, Klassinen lähestymistapa, Kokonaistodennäköisyyden kaava, Konjugaattiperhe, Konjugaatti-priorijakauma, Luottamustaso, Luottamusväli, Mediaani, Merkitsevyystaso, Moodi, Nolla-hypoteesi, Odotusarvo, Ositus, Otos, Otostieto, Parametri, Peittotodenäköisyys, Pistetoden-näköisyysfunktio, Posteriorijakauma, Posterioritodennäköisyys, Priorijakauma, Prioritieto, Prioritodennäköisyys, Testaus, Testi, Testisuure, Tiheysfunktio,Todennäköisyys, Toden-näköisyysjakauma, Tunnusluku, Uskomus, Uskottavuusfunktio, Uskottavuusjoukko, Uskottavuustodennäköisyys, Uskottavuusväli, Vaihtoehtoinen hypoteesi, Väliestimointi

Tehtävä 9.1.

Olet tullut valehtelijoiden maahan, jonka asukkaista 50 % on lieroja ja 50 % kieroja. Lierot antavat kaikkiin kysymyksiin oikean vastauksen todennäköisyydellä 3/4 ja kierot antavat kaikkiin kysymyksiin oikean vastauksen todennäköisyydellä 1/3.

Tapaat tiellä valehtelijoiden maan asukkaan, joka kysyessäsi onko hän liero vai kiero vastaa olevansa kiero. Mikä on todennäköisyys, että hän on puhunut totta?

Tehtävä 9.2.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos Bernoulli-jakaumasta parametrilla p. Tällöin satunnaismuuttuja

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

noudattaa binomijakaumaa parametrein n ja p. Valitaan parametrin p priorijakaumaksi beta-jakauma parametrein α ja β.

Määrää parametrin p posteriorijakauma ja Bayes-estimaattori posteriorijakauman odotus-arvona.

Tehtävä 9.3.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ otos normaalijakaumasta parametrein μ ja σ_0^2, jossa varianssi σ_0^2 on tunnettu. Valitaan parametrin μ priorijakaumaksi normaalijakauma parametrein ν ja τ^2.

Määrää parametrin μ posteriorijakauma ja Bayes-estimaattori posteriorijakauman odotus-arvona.

Tehtävä 9.4.

Jatkoa tehtävälle 9.3.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots , X_n$ otos normaalijakaumasta parametrein μ ja σ_0^2, jossa varianssi σ_0^2 on tunnettu. Valitaan parametrin μ priorijakaumaksi normaalijakauma parametrein ν ja τ^2.

Konstruoi Bayes-testi nollahypoteesille $\mathrm{H}_0 : \mu \leq \mu_0$ vaihtoehtoista hypoteesia $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$ vastaan.

Tehtävä 9.5.

Jatkoa tehtävälle 9.3.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots , X_n$ otos normaalijakaumasta parametrein μ ja σ_0^2, jossa varianssi σ_0^2 on tunnettu. Valitaan parametrin μ priorijakaumaksi normaalijakauma parametrein ν ja τ^2.

Konstruoi Bayes-uskottavuusjoukko parametrille μ.

Tehtävä 9.6.

Jatkoa tehtävälle 9.3.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots , X_n$ otos normaalijakaumasta parametrein μ ja σ_0^2, jossa varianssi σ_0^2 on tunnettu. Valitaan parametrin μ priorijakaumaksi epäinformatiivinen priorijakauma.

Konstruoi Bayes-estimaattori parametrille μ.

Tehtävä 9.7.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots , X_n$ otos normaalijakaumasta parametrein μ ja σ^2, jossa varianssia σ^2 ei tunneta. Valitaan parametreille μ ja σ^2 priorijakaumat seuraavalla tavalla:

$$\mu \mid \sigma^2 \sim \mathrm{N}(\nu, \tau^2\sigma^2)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$$

Määrää posteriorijakaumat parametreille μ ja σ^2 sekä parametrin μ Bayes-estimaattori.