Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos

Lassas, Lukkari / Kuusi

Mat-1.1040 Matematiikan peruskurssi L4 kevät 2008
Laskuharjoitus 11 viikko 17 - RATKAISUT

Alkuviikko

1. Tehtävänannon diskretointikaavan manipulointi johtaa yhtälöön

$$(I - \delta\theta\mathbf{\Delta}_h)\boldsymbol{u}_h^{k+1} = (I + \delta(1-\theta)\mathbf{\Delta}_h)\boldsymbol{u}_h^k, \tag{1}$$

eli

$$\boldsymbol{u}_h^{k+1} = (I - \delta\theta\mathbf{\Delta}_h)^{-1}(I + \delta(1-\theta)\mathbf{\Delta}_h)\boldsymbol{u}_h^k. \tag{2}$$

Merkitään $E := (I - \delta\theta\mathbf{\Delta}_h)^{-1}(I + \delta(1-\theta)\mathbf{\Delta}_h)$. Olkoon v matriisin E ominaisvektori ominaisarvolla μ. Tällöin

$$\begin{aligned} Ev = \mu v \quad &\iff \quad (I + \delta(1-\theta)\mathbf{\Delta}_h)v = \mu(I - \delta\theta\mathbf{\Delta}_h)v \\ &\iff \quad \delta(1-\theta+\mu\theta)\mathbf{\Delta}_h v = (\mu - 1)v. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että v on $\mathbf{\Delta}_h$:n ominaisvektori ominaisarvolla

$$\lambda = \frac{(\mu - 1)}{\delta(1-\theta+\mu\theta)}.$$

Toisaalta tunnemme kaikki $\mathbf{\Delta}_h$:n ominaisarvot, eli ratkaisemalla ylläoleva yhtälö μ:n suhteen, saadaan

$$\sigma(E) = \left\{ \frac{1+\delta(1-\theta)\lambda}{1-\delta\theta\lambda} \;:\; \lambda \in \sigma(\mathbf{\Delta}_h) \right\}. \tag{3}$$

Huomaa, että $\sigma(\mathbf{\Delta}_h) \subset (-4/h^2, 0)$, katso sivut 194-196. Kuten s. 208 kerrottiin, lämpöyhtälön kohdalla *stabiilisuus* tarkoittaa, että $|\mu| < 1$ jokaisella $\mu \in \sigma(E)$. On siis oltava

$$(1+\delta(1-\theta)\lambda)^2 < (1-\delta\theta\lambda)^2, \qquad \forall \lambda \in \sigma(\mathbf{\Delta}_h). \tag{4}$$

Sieventämällä tämä, saadaan ehto

$$\delta\lambda(2 + \delta\lambda(1-2\theta)) < 0, \qquad \forall\lambda \in \sigma(\mathbf{\Delta}_h).$$

Huomataan, että jos $\theta \geq 1/2$, ylläoleva toteutuu aina, sillä $\delta\lambda < 0$. Jos $\theta < 1/2$, niin ehto sievenee edelleen muotoon

$$2 + \delta\lambda(1-2\theta) > 0 \quad \iff \quad \delta < \frac{2}{-\lambda(1-2\theta)}, \qquad \forall\lambda \in \sigma(\mathbf{\Delta}_h),$$

Määrittelemällä $\lambda^* = \min\{\sigma(\mathbf{\Delta}_h)\}$ ja käyttämällä sille arviota $-\lambda^* < 4/h^2$ sivulta 196, saamme

$$\delta < \frac{2}{-\lambda^*(1-2\theta)} < \frac{h^2}{2(1-2\theta)}.$$

Siis diskretoitu systeemi on stabiili kun $\theta \geq 1/2$ tai $\delta \leq h^2/(2(1-2\theta))$.

2. Matriisin $\mathbf{\Delta}_h \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot ovat $\mu_k = -\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+2}\right)$, $k = 1\ldots n$, ominaisvektoreilla $\boldsymbol{w}_k$ (s. 194-196). Matriisin $\boldsymbol{M}_h \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ (s. 212) ominaisarvoyhtälöstä (merkitään $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ muodossa $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}^1\ \boldsymbol{v}^2]^T;\ \ \boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2 \in \mathbb{R}^n$)

$$\boldsymbol{M}_h\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ c^2\mathbf{\Delta}_h & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^1 \\ \boldsymbol{v}^2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^1 \\ \boldsymbol{v}^2 \end{bmatrix}$$

seuraa yhtälöt $\boldsymbol{v}^2 = \lambda\boldsymbol{v}^1$ ja $c^2\mathbf{\Delta}_h\boldsymbol{v}^1 = \lambda\boldsymbol{v}^2$. Edellisistä saadaan edelleen yhtälö $\mathbf{\Delta}_h\boldsymbol{v}^1 = \frac{\lambda^2}{c^2}\boldsymbol{v}^1$, josta $\lambda^2/c^2 = \mu_k$, siis ominaisarvot ($2n$ kpl) ovat $\lambda_{k\pm} = \pm i\frac{2c}{h}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+2}\right)$, $k = 1\ldots n$ ominaisvektoreiden komponenttien ollessa $\boldsymbol{v}^1_{k\pm} = \boldsymbol{w}^k$ ja $\boldsymbol{v}^2_{k\pm} = \lambda_{k\pm}\boldsymbol{w}^k$. Ominaisarvot ovat imaginaarisia, erillisiä ja niiden lukumäärä on $2n$.

Merkitään näitä ominaisarvoja yleisesti $\lambda = ia$, $a \in \mathbb{R}$. Stabiilisuustarkastelun teemme seuraten s. 216 menettelyä. Siis hyvän numeerisen ratkaisun pitäisi aaltoyhtälön tapauksessa olla sellainen, ettei sillä eksponentiaalisesti kasvavia eikä vaimenevia osia. Tämä toteutuu, kun menetelmän ominaisarvojen pituus on yksi. Tarkastelemme siis operaattorin $(\boldsymbol{I} - \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)^{-1}(\boldsymbol{I} + \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)$ ominaisarvoja μ ominaisvektorilla v. Ominaisarvoyhtälö antaa

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{I} - \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)^{-1}(\boldsymbol{I} + \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)v = \mu v \\ \iff \quad &(\boldsymbol{I} + \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)v = \mu(\boldsymbol{I} - \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)v \\ \iff \quad &\boldsymbol{M}_h v = \frac{2(\mu-1)}{\delta(\mu+1)}v. \end{aligned}$$

Täten v on $\boldsymbol{M}_h$:n ominaisvektori ominaisarvolla $\lambda = 2(\mu-1)/(\delta(\mu+1))$. Ratkaisemalla μ, saadaan

$$\mu = (1 + \frac{\delta}{2}\lambda)(1 - \frac{\delta}{2}\lambda)^{-1}.$$

Koska kaikki ominaisarvot λ ovat puhtaasti imaginaarisiä, eli $\lambda = ia$, $a \in \mathbb{R}$, niin

$$|\mu| = \left|(1 + \frac{\delta}{2}\lambda)(1 - \frac{\delta}{2}\lambda)^{-1}\right| = 1.$$

Näinollen stabiilisuusehto on aina voimassa.

3. Olkoon $\boldsymbol{w}_0$ jokin matriisin $\boldsymbol{M}_h$ ominaisvektori ominaisarvolla λ. Eulerin menetelmä differentiaaliyhtälön $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{M}_h\boldsymbol{x}$ ratkaisemiseksi on muotoa

$$\boldsymbol{w}^{k+1} = (\boldsymbol{I} + \nu\delta\boldsymbol{M}_h)^{\nu}\boldsymbol{w}^k,$$

jossa $\delta > 0$ on aika-askel. Eksplisiittiselle Eulerin menetelmälle (s. 187) $\nu = 1$ ja implisiittiselle Eulerille $\nu = -1$ (s. 189).

Euler sovellettuna alkuarvoon $\boldsymbol{u}_0$ tuottaa kierroksella k ratkaisun $\boldsymbol{w}^k = (1+\nu\delta\lambda)^k\boldsymbol{w}_0$, missä $|1+\delta\lambda| = \sqrt{1+\delta^2|\lambda|^2} > 1$, sillä λ on puhtaasti imaginaarinen. Tästä seuraa, että ratkaisu kasvaa rajatta.

Implisiittinen keskipistesääntö (s. 190) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\boldsymbol{w}_h^{k+1} = (\boldsymbol{I} - \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)^{-1}(\boldsymbol{I} + \frac{\delta}{2}\boldsymbol{M}_h)\boldsymbol{w}_h^k.$$

Lähtemällä ominaisvektorialkuarvosta $\boldsymbol{w}_h^0$ saadaan

$$\boldsymbol{w}_h^k = \left((1+\frac{\delta}{2}\lambda)(1-\frac{\delta}{2}\lambda)^{-1}\right)^k \boldsymbol{w}_h^0;$$

vertaa tehtävään 3. Koska λ on puhtaasti imaginaarinen, saadaan

$$\left|(1+\frac{\delta}{2}\lambda)(1-\frac{\delta}{2}\lambda)^{-1}\right|^k = 1.$$

Implisiittinen keskipistesääntö ei siis pyri kasvattamaan eikä vähentämään ratkaisun pituutta. Aaltoyhtälön tapauksessa tämä on toivottavaa, sillä tarkan yhtälön ratkaisut ovat usein aaltoliikettä, jotka eivät vaimene ajan kuluessa.

4. Tässä tapauksessa diskreetiksi tehtäväksi saadaan kuten prujussa (s. 213)

$$\begin{cases} u_h^{k+1} = 2u_h^k - u_h^{k-1} + c^2\delta^2\boldsymbol{\Delta}_h u_h^k, \\ u_h^0 = f_h, \quad u_h^1 = (\boldsymbol{I} + \frac{c^2\delta^2}{2}\boldsymbol{\Delta}_h)f_h + \delta g_h, \end{cases} \tag{5}$$

nyt vain matriisit ja vektorit ovat "∞-dimensioisia", esim.

$$u_h^k = \begin{bmatrix} \dots & u_{-2}^k & u_{-1}^k & u_0^k & u_1^k & u_2^k & \dots \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{\Delta}_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

(siis $h^2(\boldsymbol{\Delta}_h)_{i,j}$ on -2 diagonaalilla ($i=j$), vieressä 1 ja muualla ($|i-j|>1$) nollia). Nyt $g_h = 0$ ja

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 - \frac{|\boldsymbol{x}|}{h}, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases}$$

joten

$$f_h = \begin{bmatrix} \dots 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T,$$

missä 1 on indeksin 0 kohdalla. Voidaan siis laskea ensimmäisiä ratkaisuvektoreita: $u_h^0 = f_h$,

$$\begin{aligned} u_h^1 = &\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T \\ &+ \frac{c^2\delta^2}{2h^2}\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_h^2 = &\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T \\ &+ 2\frac{c^2\delta^2}{h^2}\begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T \\ &+ \frac{c^4\delta^4}{2h^4}\begin{bmatrix} \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Nähdään, että yhdellä aika-askeleella signaali etenee yhden hilapisteen verran, siis etenenemisnopeus on äärellinen. Vertaa $\boldsymbol{\Delta}_h$:n diskretointi (tehtäväpaperi tai esim. s. 197).

5. Asetetaan x-akseli joen poikkisuuntaan ja y-akseli pituussuuntaan. Olkoon veneen kulkema reitti $\boldsymbol{c}(t) = (x(t), y(t))$, jolloin tehtävänannon perusteella saadaan yhtälö

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (v_0\cos\theta, v_0\sin\theta + v),$$

jossa θ on soutusuunta x-akselista positiiviseen kiertosuuntaan mitattuna.

Oletetaan, että veneilijä etenee koko ajan ainakin hieman vastarantaa kohti, eli että funktio $x(t)$ on aidosti kasvava. Tällöin sillä on käänteisfunktio $t(x)$, ja

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{dx}dx = \int_0^L \frac{dx}{v_0\cos\theta(x)}.$$

Nyt pitäisi siis ratkaista optimaalinen soutusuunta $\theta(x)$ ehdolla, että lopuksi päädytään täsmälleen vastakkaiselle puolelle jokea. Tämä rajoitusehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$0 = y(L) - y(0) = \int_0^L \frac{dy}{dx}dx = \int_0^L \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}dx = \int_0^L \frac{v_0\sin\theta(x) + v(x)}{v_0\cos\theta(x)}dx.$$

Tulee siis minimoida funktionaalia

$$T(\theta) = \int_0^L \frac{dx}{v_0 \cos\theta(x)}$$

funktiojoukossa $W = \{\ \theta \in C^1[0,L] \mid C(\theta) = 0\ \}$, missä C on "rajoitefunktionaali"

$$C(\theta) = \int_0^L \frac{v_0 \sin\theta(x) + v(x)}{v_0 \cos\theta(x)} dx.$$

Optimaalisella funktiolla θ täytyy optimoitavan funktionaalin T gradientin olla samansuuntainen rajoitefunktionaalin C gradientin kanssa. Vaaditaan siis, että on olemassa *Lagrangen kerroin* $\lambda \in \mathbb{R}$ s.e. $\frac{dT}{d\phi}(\theta) = \lambda \frac{dC}{d\phi}(\theta)$ kaikilla $\phi \in C^1[0,L]$. Lasketaan aluksi

$$\frac{dT}{d\phi}(\theta) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \int_0^L \frac{dx}{v_0 \cos(\theta+\epsilon\phi)} = \int_0^L \frac{\sin\theta}{v_0 \cos^2\theta}\phi dx,$$

$$\frac{dC}{d\phi}(\theta) = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} \int_0^L \frac{v_0 \sin(\theta+\epsilon\phi) + v}{v_0 \cos(\theta+\epsilon\phi)} dx = \int_0^L \frac{v_0 + v\sin\theta}{v_0\cos^2\theta}\phi dx.$$

Siis on sellainen $\lambda \in \mathbb{R}$, että jokaisella $\phi \in C^1[0,L]$ pätee

$$0 = \frac{dT}{d\phi}(\theta) - \lambda\frac{dC}{d\phi}(\theta) = \int_0^L \Big(\frac{\sin\theta}{v_0\cos^2\theta} - \lambda\frac{v_0 + v\sin\theta}{v_0\cos^2\theta}\Big)\phi dx,$$

mikä on mahdollista ainostaan (Lemma 18.2, s. 220), kun

$$\lambda = \frac{\sin\theta}{v_0 + v\sin\theta}\ \forall x$$

(missä $\theta = \theta(x)$). Derivoimalla tämä lauseke puolittain, saadaan

$$0 = \frac{(v_0 + v\sin\theta)\theta'\cos\theta - \sin\theta(v'\sin\theta + v\theta'\cos\theta)}{(v_0+v\sin\theta)^2} = \frac{v_0\theta'\cos\theta - v'\sin^2\theta}{(v_0+v\sin\theta)^2}.$$

Optimaaliselle soutukulmalle $\theta(x)$ pätee näinollen differentiaaliyhtälö

$$\theta'(x) = \frac{v'(x)\sin^2\theta(x)}{v_0\cos\theta(x)}.$$

6. Tehtävässä halutaan löytää u sopivasta funktioavaruudesta siten, että annettu lauseke minimoituu ehdolla $u(0) = 0$. Etsitään minimoijaa siis avaruudesta $V = \{v \in C^1[0,1] \mid v(0) = 0\}$. Merkitään

$$I(u) := \int_0^1 (u'^2 + 4u)\, dx + u(1)^2 - u(1)$$

Jos u on jokin $I(u)$:n minimoiva funktio ja $v \in V$, niin funktiolla $t \mapsto I(u+tv)$ on minimi kohdassa $t = 0$. Tästä päättelemme variaatiomuodon

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{d}{dt} I(u+tv)\Big|_{t=0} \\ =& \frac{d}{dt}\Big(\int_0^1 [u'^2 + 2tu'v' + t^2v'^2 + 4u + 4tv]\, dx \\ &+ u(1)^2 + 2tu(1)v(1) + t^2v(1)^2 - u(1) - tv(1)\Big)\Big|_{t=0} \\ =& \int_0^1 [2u'v' + 4v]\, dx + 2u(1)v(1) - v(1), \qquad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Kysytty variaatiomuoto on siis

$$\int_0^1 [2u'v' + 4]v\, dx + 2u(1)v(1) - v(1) = 0, \qquad \forall v \in V.$$

(b) Oletetaan minimoijalle hieman lisää sileyttä, eli oletetaan, että $u \in C^2[0,1]$. Osittaisintegroidaan variaatiomuodon ensimmäinen termi, jolloin saadaan

$$\int_0^1 [-2u'' + 4]v\, dx + 2u'(1)v(1) + 2u(1)v(1) - v(1) = 0, \qquad \forall v \in V.$$

Erityisesti ylläoleva pätee niillä v, joilla $v(1) = 0$. Variaatiomuoto sievenee tällöin muotoon

$$\int_0^1 [u'' - 2]v\, dx = 0, \qquad v \in C^1[0,1], \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Lemmasta 18.2 sivulla 222 seuraa, että $u'' = 2$ välillä $(0,1)$. Edelleen, sijoittamalla tämä ensimmäiseen variaatiomuotoon, saadaan

$$(2u'(1) + 2u(1) - 1)v(1) = 0, \qquad \forall v \in V.$$

Valitsemalla jokin $v \in V$, jolla $v(1) \neq 0$ (esim. $v(x) = x$), saadaan $2u'(1) + 2u(1) - 1 = 0$. Siis minimoiva $u \in C^2[0,1]$ toteuttaa reuna-arvotehtävän

$$\begin{cases} u'' = 2, & x \in (0,1) \\ u(0) = 0, & u'(1) + u(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$