OMINAISARVOJEN LASKENTAMENETELMIÄ

Potenssimenetelmä (Power method)

KRE⁹ 20.8. $A(n \times n)$

Lähtövektori $\vec{x}_0$ Iteraatio : $\vec{x}_1 = A\vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = A\vec{x}_1$ ...

$$\vec{x}_k = A\vec{x}_{k-1}$$

(Siis $\vec{x}_k = A^k \vec{x}_0$, näin ei lasketa)

Menetelmä toimii, jos A:lla on dominoiva ominaisarvo, λ, jolle pätee :

$|\lambda| > |\lambda_k|$ muilla ominaisarvoilla λ_k.

(Esim. matriisista, jolla ei ole :

ortog. matriisi : kaikki ominaisarvot $|\lambda| = 1$)

Jos A symm., saadaan virhearvio

Lause 1 [Potenssimenetelmä]

Olk. $A(n \times n)$ symmetrinen. Olk $\vec{x} \neq \vec{0}$ mielivalt. lähtövektori.

Olk. $\vec{y} = A\vec{x}$, $m_0 = \vec{x} \cdot \vec{x}$, $m_1 = \vec{x} \cdot \vec{y}$, $m_2 = \vec{y} \cdot \vec{y}$

$$q = \frac{m_1}{m_0} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{x} \cdot \vec{x}} \quad \text{[Rayleigh-osamäärä]}$$

[Iteraatioaskeleessa otettiin merkinnät $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ $\vec{x}_k$:n ja $\vec{x}_{k+1}$:n sijasta]

q on jonkin ominaisarvon likiarvo, sitä parempi, mitä pitemmälle iteroidaan.

yleensä dominoivan, mutta ei voida yleisesti osoittaa.

Olk. $\varepsilon = \lambda - q$.

$$|\varepsilon| \le \delta = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2}$$

<u>Tod</u>: $\delta^2 = \frac{m_2}{m_0} - q^2$, $m_1 = q\, m_0$

$$\|\vec{y} - q\vec{x}\|^2 = (\vec{y} - q\vec{x}) \cdot (\vec{y} - q\vec{x})$$

$$= \underbrace{\vec{y}\cdot\vec{y}}_{m_2} - \underbrace{2q\,\underbrace{\vec{x}\cdot\vec{y}}_{m_1}}_{q^2 m_0} + q^2\,\underbrace{\vec{x}\cdot\vec{x}}_{m_0}$$

$$= m_2 - q^2 m_0 = \delta^2 m_0$$

A symmetrinen $\Rightarrow$ A:lla ortonormaali $\mathbb{R}^n$:n ominaisvektorikanta $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, vast. ominaisarvot: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Esitetään $\vec{x} = a_1\vec{u}_1 + \dots + a_n\vec{u}_n$

$$\vec{y} = A\vec{x} = a_1\lambda_1\vec{u}_1 + \dots + a_n\lambda_n\vec{u}_n$$

$$m_0 = \vec{x}\cdot\vec{x} = a_1^2 + \dots + a_n^2 \quad \text{(Pythagoras)}$$

$$\vec{y} - q\vec{x} = a_1(\lambda_1 - q)\vec{u}_1 + \dots + a_n(\lambda_n - q)\vec{u}_n$$

$$\|\vec{y} - q\vec{x}\|^2 = a_1^2(\lambda_1 - q)^2 + \dots + a_n^2(\lambda_n - q)^2$$

(Pythagoras)

Olkoon λ_1 lähimmä q:ta oleva om.arvo.

$$|\lambda_1 - q| \le |\lambda_j - q|, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\delta^2 m_0 = \|\vec{y} - q\vec{x}\|^2 \ge (\lambda_1 - q)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}_{m_0}$$

$$\Rightarrow |\lambda_1 - q| \le \delta. \quad \square$$

Esim

$$A = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.02 & 0.22 \\ 0.02 & 0.28 & 0.20 \\ 0.22 & 0.20 & 0.40 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yleinen huomautus:

Jos halutaan ominaisvektoriarvioita, on joka askeleella syytä skaalata vektori $\vec{y}$ jakamalla max|yi|:llä.

1 esim

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.890 \\ 0.609 \\ 1 \end{bmatrix}}, \quad \vec{x}_2 = A\vec{x}_1 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.931 \\ 0.541 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{jakolaskun jälkeen}}$$

$(A\vec{x}_0 = [0.73, 0.5, 0.82]^T)$

$$q = \frac{m_1}{m_0} = \frac{\vec{x}_0^T A \vec{x}_0}{\vec{x}_0^T \vec{x}_0} = \frac{2.05}{3} = 0.68333$$

$$\delta = \left(\frac{m_2}{m_0} - q^2\right)^{1/2} = \ldots = 0.134743$$

Jatketaan: (1) Lasketaan uusi $\vec{y} = A\vec{x}$

(2) Lasketaan q ja δ

(3) uusi $\vec{x} = \vec{y}$ / max|yi|

j	1	2	5
q	0.68333	0.71605	0.71994
δ	0.13474	0.03888	0.00449
ε	0.03667	0.00395	0.000056

Tarkat voidaan laskea: $\lambda = 0.72$ (dominoiva)

om. vekt. $[1, 0.5\ 1]$

$$\vec{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.99066 \\ 0.5047 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[Todelliset virheet paljon pienempiä kuin virhearviot, yleinen ilmiö numeriikassa]

Tässä olivat ensiaskeleet ominaisarvojen ja -vektoreiden laskennassa.

Potenssimenetelmässä toimitaan juuri päinvastoin kuin matriisin diagonalisoinnin yhteydessä on opittu.

Ensin lasketaan matriisin potensseja ihan raakaa voimaa käyttäen. Sitten päädytään lähelle jotain ominaisarvoa ja -vektoria.

Tästä on hyvä jatkaa kriittisellä asenteella seuraaviin askeliin.