Numeerisia ilmiöitä

Pienen tukialkion ongelma:

Esim KRE
$$\begin{cases} 0.0004x_1 + 1.402x_2 = 1.406 \\ 0.4003x_1 - 1.502x_2 = 2.501 \end{cases}$$

Tarkka ratk. $\vec{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ratk. 4-num. liukuluvuilla.

$$m = \frac{0.4003}{0.0004} = 1001 \quad (4S)$$

$$\Rightarrow (-m \cdot 1402 - 1.502)x_2 = -m \cdot 1.406 + 2.501$$

$$\begin{array}{r} -1403 \\ -\quad 1.502 \\ \hline -1405 \end{array}$$

[yleensä lasketaan pitemmässä rekisterissä ja tulos pyöristetään.]

Ehkä KRE-oletus: Pyöristyksen sijasta katkaisu.

Muutetaan mieluummin vähän esimerkkiä. $0.0004 \to 0.0003$

$$A = \begin{bmatrix} 0.0003 & 1.402 \\ 0.4003 & -1.502 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1.406 \\ 2.501 \end{bmatrix}$$

$$\texttt{>> A\backslash b} \text{ antaa } \begin{bmatrix} 10.002\ldots \\ 1.0000\ldots \end{bmatrix} \underset{4S}{=} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4 merkitsevää num.)

$$m = \frac{0.4003}{0.0003} = 1334 \quad (4s)$$

$$-m\,1.402 - 1.502 = -1872$$

$$-m \cdot 1.406 + 2.501 = -1873$$

$$\Rightarrow \quad 1872\, x_2 = 1873$$

$$x_2 = 1.003$$

$$x_1 = \frac{1}{0.0003}\left(1.406 - \underbrace{1.402 \cdot 1.003}_{1.406}\right)$$

$$= 0$$

Suht. virhe: 100%

Vaihdetaan järjestys:

$$\begin{cases} 0.4003\, x_1 - 1.502\, x_2 = 2.501 & (-m) \\ 0.0004\, x_1 + 1.402\, x_2 = 1.406 & + \end{cases}$$

$$m = \frac{0.0004}{0.4003} = 9.993 \cdot 10^{-4}$$

$$1.404\, x_2 = 1.404 \quad ; \quad x_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{0.4003}\left(2.501 + 1.502\, x_2\right) = 10$$

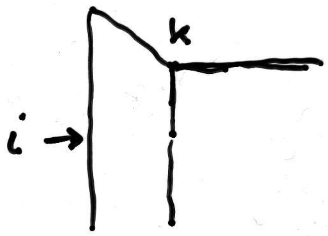
Vaikka x_2:ssa olisi virhettä (esim. $x_2 = 0.97$), niin x_1 pysyy aisoissa ($x_1 = 9.887$).

Yleisesti: |tukialkio| ≤ 1 $\Rightarrow$ hyvä käytös, ellei matriisin skaalaus ole pahasti vialla. Tarkoittaa: Eri suuruusluokkaa olevia lukuja.

Osittaistuenta

Valitaan tukiriviksi se, jossa on itseisarvoltaan suurin tukialkio.

Skaalattu osittaistuenta



Valitaan tukiriviksi i se, jossa $\dfrac{|a_{ik}|}{\max_{j \geq k} |a_{ij}|}$ on suurin

Meille riittäköön pelkkä osittaistuenta.

Matriisityyppejä, joilla rivinvaihtoja ei tarvita

1) Lävistäjävaltaiset ("diagonally dominant")

$$|a_{jj}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \quad , \; j = 1 \ldots n$$

(|lävistäjäalkio| > rivin |muiden| summa)

2) Symmetriset, posit. def.

$$A^T = A \quad , \quad \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = A\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$$

Cholesky-hajotelma:

LU-hajotelmassa $U = L^T$, siis

$A = LL^T$