Kompleksiset ominaisarvot

Olkoon A reaalinen matriisi, jolla on kompleksinen ominaisarvo $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ ja olkoon x vastaava ominaisvektori (ilman vektorinviivaa, syy: konjugointi)

$$Ax = \lambda x, \text{ joten myös}$$

$$\overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

$$\parallel$$

$$\bar{A}\bar{x} = A\bar{x} \qquad (x \neq \vec{0} \Rightarrow \bar{x} \neq \vec{0})$$

A reaalinen

Siis $\bar{\lambda}$ on ominaisarvo ja $\bar{x}$ vastaava ominaisvektori

$y_1(t) = e^{\lambda t} x$ ja $y_2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{x}$
ovat HY:n $y' = Ay$ LRT ratk.

[LRT, koska $\{x, \bar{x}\}$ LRT (eri om.-arvoihin liittyvät ominaisvektorit (LRT-Lemma 1)]

Reaalinen ratkaisukanta saadaan:

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{2}(y(t) + \bar{y}(t)) = \operatorname{Re} y(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{2i}(y(t) - \bar{y}(t)) = \operatorname{Im} y(t)$$

Olkoon $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$
$x = \vec{a} + i\vec{b}$, $\bar{x} = \vec{a} + i\vec{b}$

Muodostetaan $\operatorname{Re} y(t)$ ja $\operatorname{Im} y(t)$.

$$y(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{a}+i\vec{b}) =$$
$$= e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\vec{a}+i\vec{b})$$
$$= e^{\alpha t}[(\cos\beta t)\vec{a} - (\sin\beta t)\vec{b}$$
$$+ i(\sin\beta t)\vec{a} + (\cos\beta t)\vec{b}]$$

$$\Rightarrow \vec{u}(t) = \mathrm{Re}\, y(t) = e^{\alpha t}[(\cos\beta t)\vec{a} - (\sin\beta t)\vec{b}]$$
$$\vec{v}(t) = \mathrm{Im}\, y(t) = e^{\alpha t}[(\sin\beta t)\vec{a} + (\cos\beta t)\vec{b}]$$

$\{\vec{u}(t), \vec{v}(t)\}$ on siis reaalinen ratkaisukanta.

<u>Esim</u>: $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 16 & -7 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda = 1+8i$

$x_1 = x = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = \bar{\lambda} = 1-8i$, $x_2 = \bar{x} = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix}$

$\alpha = 1$, $\beta = 8$

$\vec{a} = \mathrm{Re}\, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \mathrm{Im}\, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) = e^t\left(\cos 8t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \sin 8t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$\vec{v}(t) = e^t\left(\sin 8t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \cos 8t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$\vec{y}(t) = c_1\vec{u}(t) + c_2\vec{v}(t).$$

Olkoon annettu alkuehdot : $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\vec{u}(0) + c_2\vec{v}(0) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{y}(t) = \frac{1}{2}(\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) =$$
$$\frac{1}{2}e^t\left((\cos 8t + \sin 8t)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (\cos 8t - \sin 8t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= e^{t}\begin{bmatrix} \cos 8t \\ \cos 8t + \sin 8t \end{bmatrix}$$

```
>> t = linspace(0, 2);
>> x = exp(t).*cos(8*t);
>> y = exp(t).*(cos(8*t) + sin(8*t));
>> plot(x, y); grid on
```

---

yleinen ratkaisu matriisimuodossa

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{u}(t) + c_2 \vec{v}(t) =$$

$$e^{\alpha t}\left[(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)\vec{a} + (-c_1 \sin\beta t + c_2 \cos\beta t)\vec{b} \right]$$

$$= e^{\alpha t}\,[\vec{a} \mid \vec{b}]\begin{bmatrix} c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t \\ -c_1 \sin\beta t + c_2 \cos\beta t \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{e^{\alpha t}\,[\vec{a} \mid \vec{b}]\begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

Tästä muodosta helppoa ratk. AA-teht.

$$\vec{y}(0) = [\vec{a} \mid \vec{b}]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = [\vec{a} \mid \vec{b}]^{-1}\,\vec{y}(0) \Rightarrow$$

KAUNIS KAAVA:

$$\vec{y}(t) = \underbrace{[\vec{a} \mid \vec{b}]}_{\text{KOORD. MUUNNOS TAKAISIN } y_1y_2\text{-koord.}}\ \underbrace{e^{\alpha t}}_{\text{VENYT./SUPIST}}\ \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix}}_{\text{KOORDINAATTIEN KIERTO}}\ \underbrace{[\vec{a} \mid \vec{b}]^{-1}}_{\text{KOORD MUUNNOS } \vec{a}\vec{b}\text{-KOORDINAATTEIHIN}}\ \vec{y}(0)$$

[Kierto myötäpäivään. Mutta $[\vec{a} \mid \vec{b}]$ on usein "väärässä järjestyksessä". Kiertosuunta ei noin kaavasta suoraan päätellä.]