Yleistetyt ominaisvektorit
Jordanin muoto

Muistellaan degeneraatioesimerkkiä

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kaksinkert. ominaisarvo $\lambda = 3$

Ominaisvektori $\vec{x} = [1, -1]^T$

Tehtävässä määrättiin vektori $\vec{u}$ s.e.

$$(A - \lambda I)\vec{u} = \vec{x}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 + u_2 = 1,$$

$$\text{val}: \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektori $\vec{u}$ on nimeltään yleistetty ominaisvektori. Tässä nyt ainakin $\{\vec{x}, \vec{u}\}$ LRT.

Johdetaan A:lle "melkein diagonalisoivi-esitys":

Olk. $X = [\vec{x} \mid \vec{u}]$, $X^{-1} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix}$ ($\exists$, koska)

$$X^{-1} A X = X^{-1} [A\vec{x} \mid A\vec{u}] = X^{-1} [\lambda \vec{x} \mid \lambda \vec{u} + \vec{x}]$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} [\lambda \vec{x} \mid \lambda \vec{u}]}_{\lambda I} + \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} [\vec{0} \mid \vec{x}]}_{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J}$$

Jordan lohko

Siis $A = X J X^{-1}$, J "melkein diag"

$$e^{At} = I + At + \tfrac{1}{2}A^2t^2 + \dots$$

$$= XIX + XJtX^{-1} + \tfrac{1}{2}t^2 \underbrace{XJX^{-1}XJX^{-1}}_{XJ^2X^{-1}} + \dots$$

$$= X\left(I + Jt + \cancel{\;}\tfrac{1}{2}J^2 + \dots\right)X^{-1} = Xe^{Jt}X^{-1}$$

$$Jt = \begin{bmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda t & 0 \\ 0 & \lambda t \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Delta}$$

$D\Delta = \Delta D$, koska D:n <u>diag. alkiot samat</u>.

Siis $e^{Jt} = e^{D+\Delta} = e^{D}e^{\Delta} =$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\left[I + \Delta + \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \dots\right]$$

$$\Delta^2 = t^2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = t^2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \Delta^3 = 0, \dots$

Siis $$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} + te^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & e^{3t} - te^{3t} \end{bmatrix}$$

Yleinen ratkaisu:

$$\vec{y} = e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1(e^{3t} + te^{3t}) + c_2 te^{3t} \\ -c_1 te^{3t} + c_2(e^{3t} - te^{3t}) \end{bmatrix}.$$

[On sama kuin edellä saatu
(Merk. $d_1 = c_1$, $d_2 = c_1 + c_2$)]

Yleisesti (yleisemmin)

Jos A (3×3), 3-kert. ominaisarvo λ
ja vain yksi om.vekt. $\vec{x}$, etsitään
yleistetyt ominaisvektorit $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$:

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \quad \to \quad \vec{x}$$
$$(A - \lambda I)\vec{u}_1 = \vec{x} \quad \to \quad \vec{u}_1$$
$$(A - \lambda I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1 \quad \to \quad \vec{u}_2.$$

Helppo osoittaa LRT.

$$A = X J X^{-1}, \quad \text{missä} \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jos A (4×4) ja lisäksi om. arvo $\mu \neq \lambda$ (yksinkert.),

$$\text{niin} \quad J = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

Jokaisella $n \times n$ -matriisilla on esitys
$A = X J X^{-1}$, missä J koostuu Jordanin lohkoista.

Ts. J on yläkolmiomatriisi, jolla nollasta poikkeavia alkioita on vain päälävistäjällä (ominaisarvot kertalukuun osoittamalla määrällä toistettuna) ja yhdellä ylemmällä lävistäjällä, jolla ne ovat ykkösiä.

Tähän perustuen voidaan e^{At} määrittää aina äärellisenä summana (ja tuloina).

Symbolilaskentaohjelmat käyttävät yleensä tätä menetelmää e^{At}:n laskemiseen.

Numeerisesti laskettaessa vaihtoehtoja on 19 (dubious) + x kpl.

Matlabissa $\boxed{\text{expm}}$

Ks. .../matlab/lindys.m