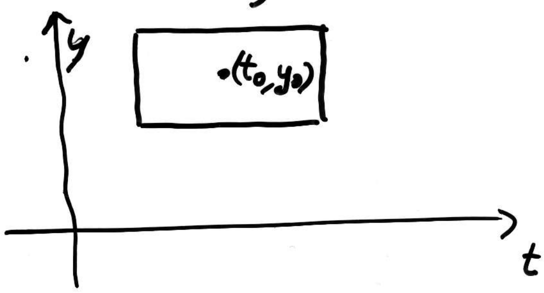
Diff. yhtälöiden numeriikkaa (2.12.08)

Viimeksi kalvot ja prujut (Kts. L/Luento1-36.html)

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0. \qquad \text{(AA)}$$

Ol: f ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatk. jossain suorakulmiossa



yleinen $\exists_1$-lause: $\exists_1$ (AA) - tehtävän ratkaisu jollain t_0:n sisältävällä välillä.

Seuraavissa tarkasteluissa oletetaan yksikäs. ratk. koko tarkasteluvälillä.

"kaupankäynti":

1. Virhetoleranssi, miten suuri virhe siedetään.
2. Kuinka paljon ollaan valmiita maksamaan.

Askel (marssi) menetelmät

Diskreetti "aikapistejono": $t_0, t_1, t_2, \ldots$

$h_n = t_{n+1} - t_n$ (ei välttämättä tasavälinen)

Ratkaisufunktiota $y(t)$ näissä aikapisteissä approksimoiva jono

$$y_0, y_1, y_2, \ldots$$

<u>Yksiaskelmenetelmä</u>: y_{n+1} lasketaan arvosta y_n (ja t_n)

<u>Moniaskelmenetelmä</u>: y_{n+1}:n laskemassa käytetään arvoja $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k+1}$

Käsittelemme tällä kertaa vain 1-askelm.

<u>Eulerin menetelmä</u> (v. 1768 (!))

$$y_1 = y_0 + h_0 f(t_0, y_0) = y(t_0) + h_0 y'(t_0)$$
$$= y(t_1) + O(h_0^2)$$

Uudeksi alkuarvoksi otetaan (hiukan virheellinen) (t_1, y_1)

$$y_2 = y_1 + h_1 f(t_1, y_1) \simeq y(t_1) + h_1 y'(t_1)$$
$$\simeq y(t_2)$$

$\Rightarrow$

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

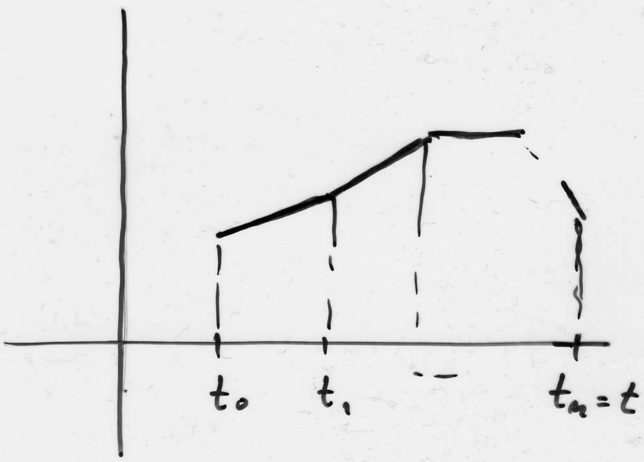
Usein (ainakin ensiaskelissa) otetaan $h_n = h =$ vakio. [Oikeissa algoritmeissa ei juuri koskaan.]

Esim ~~[illegible]~~ kalvolla (Linkki yllä)

... 06/L/L14dynumkalvot.pdf projekt

L/Luento1-36.html pe 28.11 – linkit

2. Globaali, kumuloituva katkaisuvirhe



Kiinnitetään $t > t_0$ ja jaetaan väli $[t_0, t]$ n:ään yhtäsuureen osaan: $h = \frac{t - t_0}{n}$.

Siis $t = t_n = t_0 + nh$.

<u>Kokonaisvirhe</u> pist. $t \underset{(?)}{\sim} n \cdot O(h^2)$

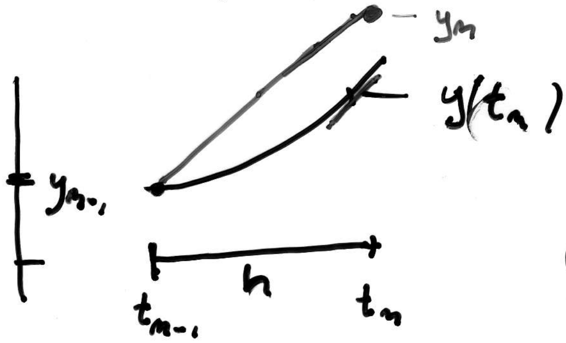
$$= \frac{\overbrace{nh}^{t-t_0}}{h} O(h^2) = O(h).$$

Päättely on epätarkka, oikeammin:

Jos nämä (tangentit) olisivat yhdensuuntaiset, niin $E_2 = e_1 + e_2$. Tämä ei yleensä pidä, mutta pätee kuitenkin "tarkkuudella $O(h)$" tietyin edellytyksin.

Tarkempi analyysi esim: Burden – Faires

Implisiittiset menetelmät, "Backward Euler"



$$y_n = y_{n-1} + h f(t_n, y_n)$$

TÄTÄ EI TUNNETA

y_n täytyy ratkaista yhtälöstä.

Jos diff. yht. on lineaarinen, niin kyseessä on lin. yht., jolloin ratkaisu on helppo juttu.
Epälineaarisessa eräs mahdollisuus on suorittaa muutama askel vaikkapa Newtonin iteraatiota.

Esim. $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$, $h = 0.1$

$$y_{n+1} = y_n + h(1 - t_{n+1} + 4y_{n+1})$$

$$\Rightarrow \quad y_{n+1} = \frac{y_n + h(1 - t_{n+1})}{1 - 4h}$$

```
>> t = 0:0.1:0.5 ; h = 0.1;
>> for n = 1:5
>>     y(n+1) = (y(n) + h*(1 - t(n+1)))/(1-4*h);
>> end
>> [t; y]
```

0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	1.8167	3.1611	5.3852	9.0753	15.21