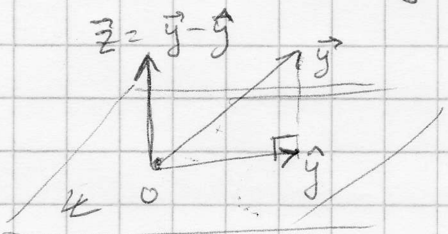
Lause 8 **Ortog. hajotelma**

Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ aliavaruus. Jokainen $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää 1-käsitteisesti muodossa $\vec{y} = \hat{y} + \bar{z}$, missä $\hat{y} \in W$ ja $\bar{z} \in W^{\perp}$.

Jos $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ on W:n ortonormaali kanta, niin

$$\hat{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \ldots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_p)\vec{u}_p,$$

$$\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}.$$



TÄSTÄ

Tod Olk. $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ W:n ON kanta, olk. $\hat{y}$ kuten yllä ja $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$.

Osoitetaan, että $\vec{z} \perp \vec{u}_j \ \forall j = 1..p$.

$$\bar{z} \cdot \vec{u}_j = (\vec{y} - \hat{y}) \cdot \vec{u}_j = \vec{y} \cdot \vec{u}_j - \hat{y} \cdot \vec{u}_j$$

$$= \vec{y} \cdot \vec{u}_j - (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\underbrace{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_j}_{0} - \ldots - (\vec{y} \cdot \vec{u}_j)(\overbrace{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_j}^{1}) - \ldots - (\vec{y} \cdot \vec{u}_p)(\underbrace{\vec{u}_j \cdot \vec{u}_p}_{0})$$

$$= \vec{y} \cdot \vec{u}_j - \vec{y} \cdot \vec{u}_j = 0$$

$$\Big(\vec{z} \cdot \vec{u}_j = (\vec{y} - \hat{y}) \cdot \vec{u}_j = \vec{y} \cdot \vec{u}_j - \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (\vec{y} \cdot \vec{u}_i)(\underbrace{\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j}_{\delta_{ij}})}_{\vec{y} \cdot \vec{u}_j} = 0 \Big)$$

ja niin $\Rightarrow \vec{z} \perp \vec{u}_j \ \forall j = 1..p \Rightarrow z \perp W$.

Esityksen 1-käsitteisyys:

Jos olisi toinen esitys: $\vec{y} = \hat{y}_1 + \vec{z}_1$,

niin $\hat{y}_1 + \vec{z}_1 = \hat{y} + \vec{z} \Rightarrow$

$$\underbrace{\hat{y}_1 - \hat{y}}_{\in W} = \underbrace{\vec{z} - \vec{z}_1}_{\in W^\perp} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{y}_1 - \hat{y} = \vec{0} \\ \vec{z} - \vec{z}_1 = \vec{0} \end{matrix}$$

koska $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$.

(Jos $\vec{w} \in W$ & $\vec{w} \in W^\perp$, niin $\vec{w} \cdot \vec{w} = 0$
$\Rightarrow \vec{w} = \vec{0}$) $\square$

Esitys on siten kannasta riippumaton.

Esim. $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

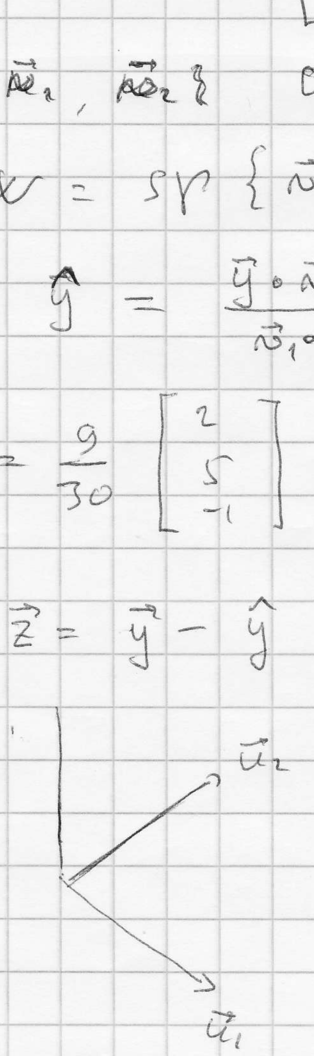
$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ on kanta avaruudelle

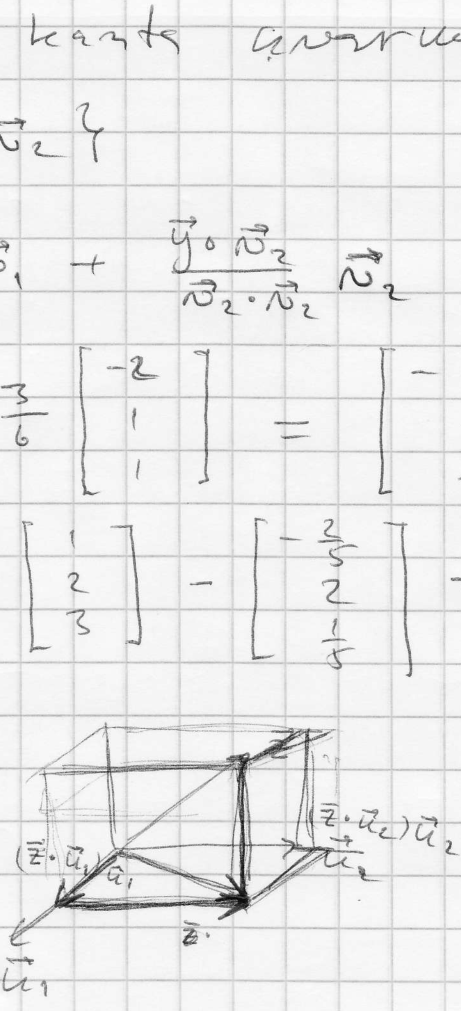
$W = sp\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

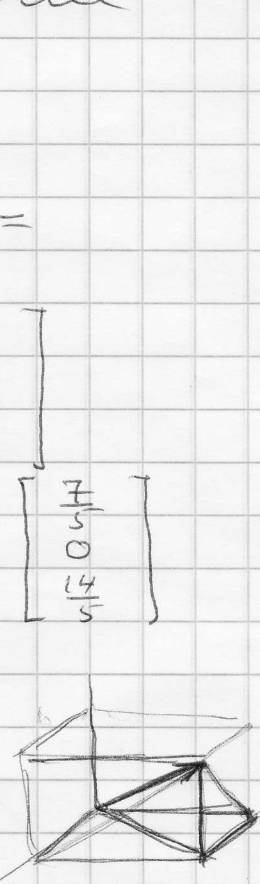
$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 =$$

$$= \frac{9}{30} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{6} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ 0 \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$







Lause 9 Paras approksimaatio

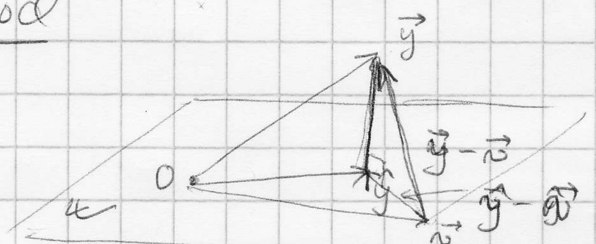
Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ aliavaruus, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ja $\hat{y}$ $\vec{y}$:n kohtisuora projektio W:lle.

Tällöin $\hat{y}$ on $\vec{y}$:n lähin piste W:ssä,

ts. $\|\vec{y} - \hat{y}\| < \|\vec{y} - \vec{v}\| \quad \forall \vec{v} \in W, \; \vec{v} \neq \hat{y}$.

$\hat{y}$ on siis $\vec{y}$:n paras approksimaatio W:n vektoreilla. $\|\vec{y} - \vec{v}\|$ voidaan ajatella approksimaation virheeksi. Virhe minimoituu valitsemalla $\underline{\vec{v} = \hat{y}}$.

Tod



$$\|\vec{y} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{y} - \hat{y}\|^2 + \|\vec{v} - \hat{y}\|^2 > \|\vec{y} - \hat{y}\|^2$$

Tod: Olk. $\vec{v} \in W$, $\vec{v} \neq \hat{y}$.

Tällöin $\vec{y} - \vec{v} = \underbrace{\vec{y} - \hat{y}}_{\perp W} + \underbrace{\hat{y} - \vec{v}}_{\in W}$

$$\Rightarrow \|\vec{y} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{y} - \hat{y}\|^2 + \underbrace{\|\hat{y} - \vec{v}\|^2}_{>0} > \|\vec{y} - \hat{y}\|^2$$

□

Merk $\hat{y} = P_W \vec{y}$ ($\mathrm{proj}_W \vec{y}$ Lay:ssä)

$$= (\vec{y} \cdot \vec{u}_1)\vec{u}_1 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_p)\vec{u}_p$$

$U = [\vec{u}_1 \mid \vec{u}_2 \mid \dots \mid \vec{u}_p]$

$$P_W \vec{y} = U \begin{bmatrix} \vec{y}\cdot\vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{y}\cdot\vec{u}_p \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \vec{y} \\ \vdots \\ \vec{u}_p^T \vec{y} \end{bmatrix}$$

$= U U^T \vec{y}$, ts. $P_W \vec{y} = UU^T\vec{y}$

Olkoon U $(n \times p)$, ON sarakkeet ,

$W = \mathrm{Col}\, U$

$U^T U = I_p$, $U^T U \vec{x} = \vec{x}$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^p$

$UU^T\vec{y} = P_W \vec{y}$ $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Ortog. proj. Col U : lle

6.4 Gram – Schmidt (sivuutetaan)

QR – hajotelma Olk. A $(m \times n)$

LRT sarakkeet. Tällöin A : lla on hajotelma $A = QR$, Q $(m \times n)$ ortonormaalit sarakkeet (ON kanta Col A : lle) , R $(n \times n)$ kääntyvä yläkolmiomatr , päälävistäjän alkiot > 0

Tod : Ortonormeerataan Col A : n kanta $\to \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$

$$Q = [\vec{u}_1 | \dots | \vec{u}_n]$$

$$\vec{x}_k = r_{1k}\vec{u}_1 + \dots + r_{kk}\vec{u}_k + 0\,\vec{u}_{k+1} + \dots + 0\,\vec{u}_n$$

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} r_{1k} \\ \vdots \\ r_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad R = \left[\vec{r}_1 \mid \dots \mid \vec{r}_k \right]$$

$$A = \left[\vec{x}_1 \mid \dots \mid \vec{x}_n \right] = \left[Q\vec{r}_1 \mid \dots \mid Q\vec{r}_n \right] = QR.$$

Esim QR – hajotelma void laskea:

1) Ortonormeerataan A:n sarakkeet $\to Q$

$$A = QR \quad \text{jolloin } R$$

$$Q^T A = Q^T Q R = R.$$