to 13.11.08

Ortogonaalisuus ja PNS (LSQ)

Lay Ch 6 s. 373 →

6.1 Sisätulo $\mathbb{R}^n$:ssä

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Lause 1 Olk. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

(c) $(c\vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$

(d) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Esim (b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) w_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i w_i + \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

(Muut vielähin ilmeisempiä.) $\square$

Normi: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$

Perusominaisuudet:

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ (Schwarz'in ey.)

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Kolmioey.)

$\|c\vec{u}\| = |c| \|\vec{u}\|$

$\|\vec{u}\| \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Ortogonaalisuus : $\vec{u} \perp \vec{v}$ tarkoittaa : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Lause 2 **Pythagoraan lause**

Jos $\vec{u} \perp \vec{v}$, niin $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Tod : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}}_{0} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

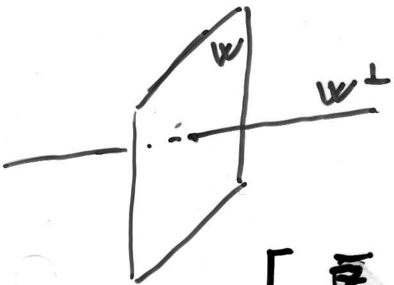
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 . \quad \square$$

Ortokomplementti

Olk. $W \subset \mathbb{R}^n$ aliavaruus.

$W^\perp$ = W:n ortokomplementti

$$= \{ \vec{z} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\vec{z} \perp W}_{\text{ts. } \vec{z} \perp \vec{w} \ \forall \vec{w} \in W} \}$$



$W^\perp$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus

[$\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in W^\perp \Rightarrow \vec{z}_1 \cdot \vec{w} = 0 \ \forall \vec{w} \in W$
$\vec{z}_2 \cdot \vec{w} = 0 \ \forall \vec{w} \in W$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{z}_1 + \vec{z}_2) \cdot \vec{w} = \vec{z}_1 \cdot \vec{w} + \vec{z}_2 \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{w} \in W. \\ (c\,\vec{z}_1) \cdot \vec{w} = c(\vec{z}_1 \cdot \vec{w}) = 0 \text{ —— '' ——} \end{cases}$$

Lause 3 $(\text{Row } A)^\perp = N(A)$
$(\text{Col } A)^\perp = N(A^T)$

Helppo todistaa, ehkä ei tarvita.
(Lay s. 381)

6.2 Ortogonaaliset joukot

Lause 4 Ortogonaalinen vektorijoukko $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ $\forall i = 1..p$ on LRT.

Tod: Ol. $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p = \vec{0}$.

$$\Rightarrow 0 = \vec{v}_1 \cdot (\qquad\qquad)$$
$$= c_1 \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}_{\|\vec{v}_1\|^2 > 0} + c_2 \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}_{0} + \ldots + c_p \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_p}_{0}$$

$\Rightarrow c_1 = 0$. Samoin $c_2 = 0, \ldots, c_p = 0$.

(Tai: $\sum_{i=1}^{p} c_i \vec{v}_i = \vec{0}$, kerr. $\vec{v}_k$:lla

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{p} c_i \underbrace{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_k}_{0,\ \text{kun } i \neq k} = c_k \underbrace{\|\vec{v}_k\|^2}_{>0} \Rightarrow c_k = 0)$$

Ortogonaalinen kanta. $\mathbb{R}^n$:n ortogonaalinen vektorijoukko $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, $\vec{v}_i \neq 0$, on siis $\mathbb{R}^n$:n kanta, jota hyvästä syystä kutsutaan ortogonaaliseksi kannaksi.

[Samoin p-ulotteisen aliavaruuden p ortog. vektoria $\neq 0$ ovat sen kanta.]

Jos normeerataan 1-vektoreiksi, saadaan: ortonormaali kanta.

Lause 5 Olkoon $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ aliavaruuden $W \subset \mathbb{R}^n$ ortonormaali (ON) kanta. Tällöin jokainen $\vec{y} \in W$ voidaan esittää:

$$\vec{y} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_p\vec{u}_p, \quad \text{missä } c_j = \vec{y} \cdot \vec{u}_j$$

(Fourier-esitys)

Tod $\vec{y} = \sum_{i=1}^{p} c_i \vec{u}_i$, kerr. puolitt. $\vec{u}_k$:lla

$$\Rightarrow \vec{y} \cdot \vec{u}_k = \sum_{i=1}^{p} c_i \underbrace{(\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k)}_{\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = k \\ 0, & \text{kun } i \neq k \end{cases}}$$

$$= c_k . \quad \square$$

Siis kertoimet c_i saadaan suoraan sisätuloina $\vec{y} \cdot \vec{u}_i$, tarvitsematta ratkaista yhtälösysteemiä, kuten ei-ortog. tapauksessa.

Huom! Jos kanta $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ on ortog., muttei normeerattu, saadaan ON kanta: $\vec{u}_k = \frac{\vec{v}_k}{\|\vec{v}_k\|}$

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{p} (\vec{y} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{p} \frac{(\vec{y} \cdot \vec{v}_k)}{\|\vec{v}_k\|^2} \vec{v}_k$$

Esim

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

Esitä $\vec{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ tässä kannassa.

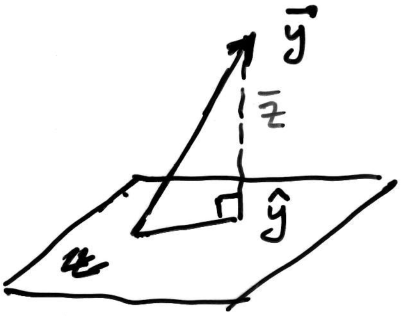
$$\vec{y} \cdot \vec{v}_1 = 11, \quad \vec{y} \cdot \vec{v}_2 = -12, \quad \vec{y} \cdot \vec{v}_3 = -33$$

$$\|\vec{v}_1\|^2 = 11, \quad \|\vec{v}_2\|^2 = 6, \quad \|\vec{v}_3\|^2 = \frac{33}{2}$$

$$\vec{y} = \frac{11}{11} \vec{v}_1 - \frac{12}{6} \vec{v}_2 - \frac{33}{33} \cdot 2 \vec{v}_3$$

$$= \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3$$

Ortogonaaliset projektiot (Lay 6.3)



$\vec{y} - \hat{y} \perp W$

$\hat{y}$ on $\vec{y}$:tä lähin aliavaruuden W piste.

$\hat{y}$ on $\vec{y}$:n paras approksimaatio avaruuden W vektoreilla.

Tässä on avain PNS-ongelmiin.

Lause 8 [Ortogonaalinen hajotelma]

Olkoon $W \subset \mathbb{R}^n$ aliavaruus. Jokainen $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ voidaan esittää 1-käsitteisesti muodossa $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$, missä

$$\hat{y} \in W, \quad \vec{z} \in W^{\perp}$$

Jos $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p\}$ on W:n ortonormaali kanta, niin

$$\hat{y} = (\vec{y}\cdot\vec{u}_1)\vec{u}_1 + \dots + (\vec{y}\cdot\vec{u}_p)\vec{u}_p,$$

$$\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$$