Ominaisarvot ja diagonalisointi

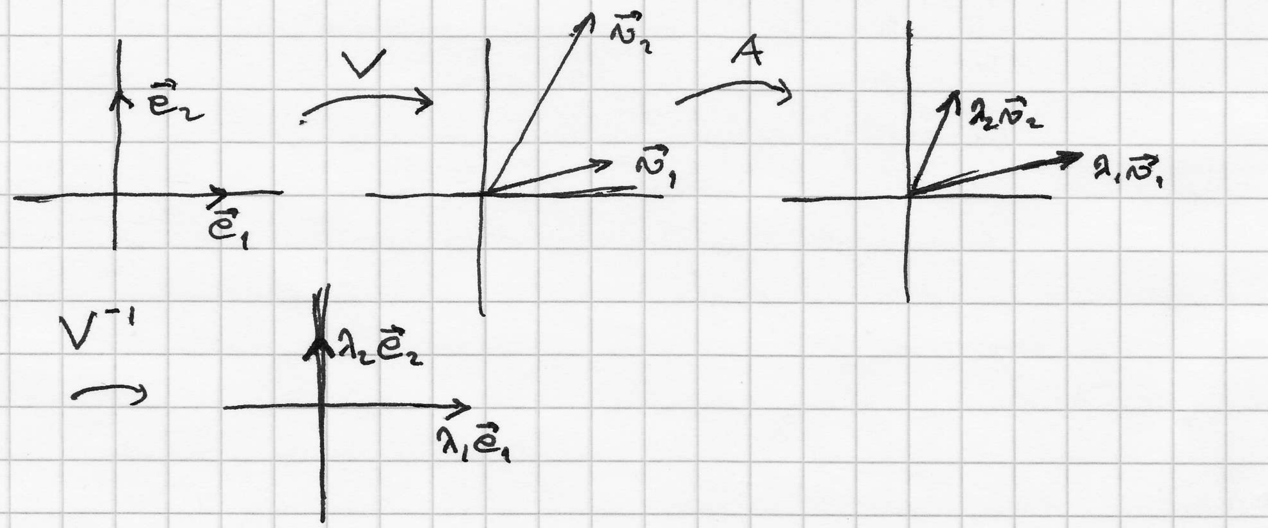
pe 7.11.

Esim. $A\ (2\times 2)$, $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$
$A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$

Oletetaan: $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ LRT.

Olk. $V = [\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2]$ $\quad I = [\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2]$

$$VI = V, \text{ ts. } V\vec{e}_1 = \vec{v}_1, \quad V\vec{e}_2 = \vec{v}_2$$



Ts. $V^{-1}AV\vec{e}_i = \lambda_i\vec{e}_i$, $\quad i = 1, 2$

$$\Leftrightarrow \quad V^{-1}AV\underbrace{[\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2]}_{I} = [\lambda_1\vec{e}_1 \mid \lambda_2\vec{e}_2] =$$

$$= \underbrace{[\vec{e}_1 \mid \vec{e}_2]}_{I}\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}}_{D}$$

ts. $V^{-1}AV = D$,

$$A = VDV^{-1}$$

$A\ (2\times 2)$ on diag.va, jos sillä on 2 LRT om. vektoria.

Esim Diagonalisoi $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, jos mahdollista.

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} = \lambda I\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \quad , \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

~~Valitaan siis~~ Määritetään siis parametri λ s.e. HY:llä $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ on epätriv. ratk. $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Ehto ehto: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) + 2$$

$(D(\lambda)$, KRE$)$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}$

Ominaisvektorit:

$\lambda_1 = 1$ $\quad (A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$: $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(2x_1 - 2x_2 = 0)$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ toinen valittavissa vapaasti, vaik $x_2 = 1$

$\lambda_1 = +2$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff x_1 - 2x_2 = 0 \iff x_1 = 2x_2$$

Val. esim. $x_2 = 1 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Merk. $V = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Diagonalisointi

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$\iff A\underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \end{bmatrix}}_{V} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 \mid \lambda_2\vec{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \end{bmatrix}}_{V}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{D}$$

$AV = VD$. Koska $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ LRT,

$\exists V^{-1} \left(= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$, 2×2 - tapaus

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(päälävistäjän alkiot vaihdet. sivulävist. miinustetaan))

$$A = VDV^{-1}$$

V ja V^{-1} yllä, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Huom 1) Yleinen diagonalisointi aivan samoin ($2 \to n$)

Huom 2) Aina päästään muotoon

$AV = VD$. Sitten tarvit. V^{-1}

Luento 4, 2. luentoviikko 11.11.08

Jatketaan ominaisarvoja.

Katsotaan vielä ominaisprujun s. 8 esimerkkiä

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda)\,(= D(\lambda)) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 16$$

[HUOM! Älä kerro auki!]

$$p(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^2 = 16 \iff 2-\lambda = \pm 4$$

$$\iff \lambda = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}.$$

$$p(\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-6)^2$$

[illegible] yhtälöryhmä

$\lambda_1 = -2$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \text{ vapaa} \\ x_2 = 0 \end{array}$$

$1. \Rightarrow x_1 = -x_3$

$x_3 = -1$; $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 6}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$-x_1 + x_3 = 0$, x_3 vapaa, x_2 vapaa, $x_1 = x_3$

Valinta 1) $x_3 = 1$, $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valinta 2) $x_3 = 0$, $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \text{ LRT}$$

Siis $m_6 = \dim(E_6) = 2$

$M_6 = 2$ | Samat.

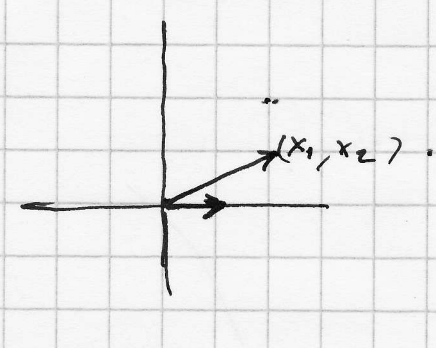
$\boxed{\text{Siirrytään kuvaukselle}}$

Linear Transf. KRE[9] s. 327

1.3. Illuusiot romahtavat

Esim 1.3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ajatellaan lineaarikuvauksena

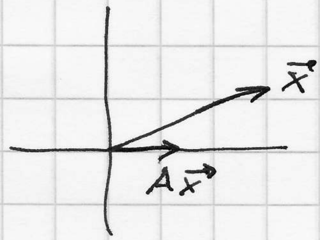
~~Aineistoa~~ $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$



Jos $x_2 = 0$, eli $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

niin $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Jos $x_2 \neq 0$, niin $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\0\end{bmatrix}$,
jolloin $\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ ja $A\vec{x} = \begin{bmatrix}x_2\\0\end{bmatrix}$ eivät ole yhdensuuntaiset



Siten $\lambda = 0$ on ainoa ominaisarvo (oltava kaksinkertainen) ja vastaava ominaisavaruus
$E_0 = \left\{ \begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ (= x_1-akseli)

$M_0 = 2$, $m_0 = 1$.

Lasketaan: $p(\lambda) = \begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2$,
joten todellakin $\lambda = 0$ on kaksinkert. om. arvo.

<u>Om. vekt.</u> $\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ $x_2 = 0$,

$\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\0\end{bmatrix}$

Kanta: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

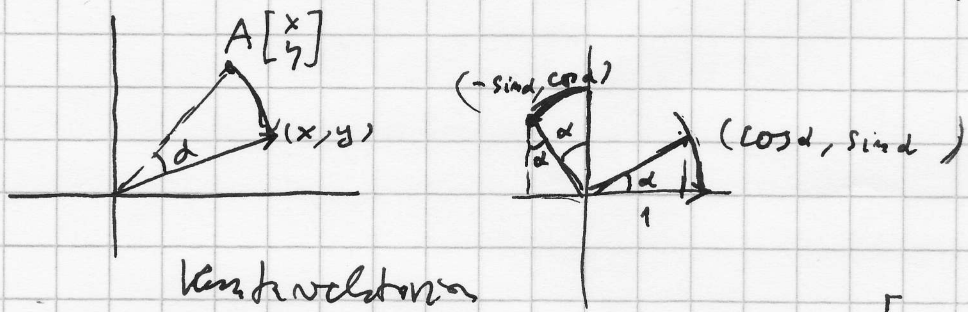
KANKAALLE s. 12

LAUSE 1.2 $m_\lambda \leq M_\lambda$, $<$ on mahdollinen.

Kompleksiset ominaisarvot

Esim. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$

(*)



Kantavektorien kuvat sarakkeiksi

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = \pm i$$

$\lambda = i$: $\begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}$ $\quad -ix_1 + x_2 = 0$

Val. $x_2 = 1$,

$x_1 = +\frac{1}{i} = -i$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -i \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

eigshow $[0\ 1; -1\ 0]$

Jokaisen lineaarikuvaus $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on matr. kuvaus

(*) Lineaarikuvauksen matriisi; $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Ladotaan kantavektorien (I:n sarakkeiden) kuvat vierekkäin.