25.1.2009
Matematiikan peruskurssi Mat-1.1332, KP3-ii syksy 2008
Lineaarialgebran kertausta osa 2 *Pekka Alestalo, Heikki Apiola, Kenrick Bingham*
Pruju on täällä: `http://math.tkk.fi/teaching/kp3-ii/08/L/LAkertaus2.pdf`
Kirjallisuutta: Lay: 5.1 – 5.4, KRE Ch 8, Matrix eigenvalue problems
Prujuja:

`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/ominaisarvot.pdf`
`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/orthsymm.pdf`

Ominaisarvoteoriaa, $A(n \times n)$

- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \lambda$ on A:n **ominaisarvo** ja $\boldsymbol{x}$ on λ:aa vastaava **ominaisvektori**. Voi olla $\lambda \in \mathbb{C}$, jolloin myös ominaisvektorin komponentit ovat kompleksilukuja, eli $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$.

  Lineaarikuvauksia ja ominaisarvoja/-vektoreita havainnollistava, Maplella toteutettu sivu
  `http://math.tkk.fi/~apiola/Tampere2006/ominaisarvot.html`

- Ominaisarvon etsiminen: Jotta yhtälöllä $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ eli $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ voisi olla *nollasta poikkeava* ratkaisu $\mathbf{v}$, pitää olla
$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{1}$$
  Ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ saadaan n:nnen asteen yhtälön (1) ratkaisuina.

  Vastaavat ominaisvektorit ratkaistaan lineaarisesta yhtälöryhmästä $(A - \lambda_j I)\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$.

- Ominaisarvon λ_j **algebrallinen kertaluku** M_{λ_j} kertoo, kuinka moninkertainen juuri se on yhtälölle (1). Ominaisarvon λ_j **geometrinen kertaluku** m_{λ_j} kertoo vastaavan ominaisavaruuden E_{λ_j} dimension eli vastaavien lineaarisesti riippumattomien ominaisvektorien lukumäärän.
$$1 \leqslant m_{\lambda_j} \leqslant M_{\lambda_j} \qquad M_{\lambda_1} + \cdots + M_{\lambda_k} = n$$

- Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat `LRT`.

- Symmetrisen matriisin ($A^T = A$) ominaisarvot ovat reaaliset ja sen eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaaliset. Sillä on n kpl. `LRT` ominaisvektoreita, eli $\mathbb{R}^n$:llä on A:n ominaisvektorikanta, joka voidaan valita ortogonaaliseksi. (Se on automaattisesti ortogonaalinen, jos kaikki ominaisarvot ovat yksinkertaisia, muussa tapauksessa täytyy kunkin ominaisavaruuden sisällä suorittaa ns. *Gram-Schmidt*-ortogonalisointi.)

- **Diagonalisointi**: Jos A:lla n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, voidaan esittää: $A = VDV^{-1}$, missä
$$V = \begin{bmatrix} \\ \mathbf{v_1 v_2} \cdots \mathbf{v_n} \\ \\ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2}$$
  Jos A on symmetrinen, voidaan siis $\mathbf{v_j}$:t valita ortonormaaleiksi, jolloin saadaan ortogonaalinen diagonalisointi, ts. $V^{-1} = V^T$.

Esimerkki ominaisarvojen laskemisesta

Otetaan varmuuden vuoksi perusteellisen yksityiskohtaisesti laskettu esimerkki ominaosarvojen ja -vektorien laskennasta ja diagonalisoinnista. Lisää esimerkkejä on niin Lay:ssa kuin KRE:ssä ja yllä mainituissa prujuissa.

Lasketaan matriisin
$$A = \begin{bmatrix} -5 & 27 & 9 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 18 & 1 \end{bmatrix}$$
ominaisarvot ja ominaisvektorit: Karakteristinen polynomi on
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 27 & 9 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 18 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 75\lambda + 250.$$

Kolmannen asteen polynomille on ratkaisukaava, mutta se on jonkin verran monimutkainen. Tavallisesti harjoitustehtävässä on esim. joko annettu jokin juurista tai pyydetty kokeilemaan pieniä kokonaislukuja tms. Kun kaikki paitsi kaksi juurta on löydetty, loput kaksi saadaan jakamalla karakteristinen polynomi tekijöillä $\lambda - \lambda_1, \ldots, \lambda - \lambda_{n-2}$, missä λ_j:t ovat tunnetut juuret.

Tässä tapauksessa voitaisiin vaikkapa kertoa, että yksi juurista on -5. Tällöin loput kaksi saadaan jakamalla karakteristinen polynomi $(\lambda + 5)$:llä. Tämä voidaan tehdä jakokulmassa tai määräämättömien kertoimien menetelmällä. Tehdään ensin jälkimmäisellä, varmaankin helpommin ymmärrettävällä tavalla (etenkin kun jakokulmien ulkonäkö vaihtelee sen mukaan, milloin kukakin on käynyt kansa/peruskoulua).

Määrätään kertoimet a ja b niin, että yhtälö

$$-\lambda^3 + 75\,\lambda + 250 = \left(-\lambda^2 + a\lambda + b\right)(\lambda + 5) = -\lambda^3 + (a-5)\,\lambda^2 + (b + 5\,a)\,\lambda + 5\,b$$

on identtisesti voimassa. (λ^2:n kerroin nähdään suoraan -1:ksi.) Nähdään heti, että $a = 5$ ja $b = 50$. Tarkistetaan, että $b + 5\,a = 50 + 25 = 75$.

Näytetään kuitenkin myös nykymuodin(?) mukainen jakokulmalasku:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & -\lambda^2 & +5\lambda & +50 & \\
\cline{2-5}
\lambda+5 & -\lambda^3 & & +75\lambda & +250 \\
- & -\lambda^3 & -5\lambda^2 & & \\
\hline
 & & 5\lambda^2 & +75\lambda & +250 \\
 & - & 5\lambda^2 & +25\lambda & \\
\cline{2-5}
 & & & 50\lambda & +250 \\
 & & - & 50\lambda & +250 \\
\cline{3-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Siis kaksi muuta juurta saadaan polynomin $-\lambda^2 + 5\lambda + 50$ juurista, jotka ovat -5 ja 10.

Ominaisarvot ovat siis -5 (kaksinkertainen, ts. algebrallinen kertaluku $M_{-5} = 2$) ja 10 (yksinkertainen, ts. algebrallinen kertaluku $M_{10} = 1$).

Lasketaan niitä vastaavat ominaisvektorit. Ensin ominaisarvoa -5 vastaavat: (Niitä voi siis olla vähintään 1 ja enintään 2 ($= M_{-5}$) lineaarisesti riippumatonta.)

$$\big(A - (-5)I\big)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 27 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 18 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 27 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 18 & 6 & 0 \end{array}\right],$$

missä oikealla on kirjoitettu yhtälöryhmä tiiviisti liitännäismatriisiksi. Lasketaan ominaisvektorit Gaussin algoritmilla; jätetään liitännäismatriisin oikea puoli kirjoittamatta, koska nollavektori säilyy rivioperaatioissa nollavektorina:

$$\begin{bmatrix} 0 & 27 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 18 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} :9 \\ :3 \\ :6 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Saadaan kolme identtistä yhtälöä, eli yhtälöryhmään jää vain yksi yhtälö:

$$3x_2 + x_3 = 0$$

Tästä voitaisiin heti kirjoittaa ratkaisu, mutta tehdään huvin vuoksi vielä muodollisesti “katkeraan loppuun saakka”. Vähentämällä 1. rivi toisesta ja sitten kolmannesta, saataisiin kaksi 0-riviä, ja päädyttäisiin siis muotoon:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tukialkioita on tässä riviporrasmuodossa vain *toisessa* sarakkeessa oleva luku 3, joten muita sarakkeita vastaavat muuttujat x_1 ja x_3 ovat vapaita. Merkitään x_1:tä parametrilla s ja x_3:a parametrilla t; tällöin $x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}t$. Siis

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} s \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Se, että muuttujat x_1 ja x_3 ovat vapaita, tarkoittaa, että parametrit s ja t voivat saada kaikki mahdolliset arvot, paitsi että ne eivät voi olla yhtäaikaa nollia (koska silloin saataisiin $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, joka ei kelpaa ominaisvektoriksi).

Vapaita parametreja on siis 2, joten lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita saadaan 2, esim. (3):n oikealla puolella olevat

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

jotka saadaan (3):stä valinnoilla $s = 1$, $t = 0$ ($\mathbf{v_1}$) ja $s = 0$, $t = 1$ ($\mathbf{v_2}$). Nämä kaksi vektoria ovat siis ominaisarvoa -5 vastaavan ominaisavaruuden kanta. Niiden lukumäärä on tämän ominaisarvon geometrinen kertaluku: $m_{-5} = 2$.

Vastaavasti lasketaan ominaisarvoa 10 vastaava ominaisvektori:

$$\big(A - 10I\big)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -15 & 27 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -15 & 27 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 18 & -9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 3 \quad :3 \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} -15 & 27 & 9 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tukisarakkeita ovat nyt ensimmäinen ja toinen, joten vapaa muuttuja on $x_3 =: t$, jolloin

$$x_2 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2}t, \quad x_1 = \frac{27x_2 + 9x_3}{15} = \frac{3}{2}t \qquad \text{eli} \qquad \mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Valinnalla $t = 1$ saadaan nyt

$$\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Huomaa: Ominaisvektorit voidaan kertoa nollasta poikkeavilla skalaareilla, siten yllä saadaan haluttaessa helposti kokonaislukukoordinaateista koostuvat ominaisvektorit.

Muistathan: Ominaisvektorilaskuissa tulee aina vähintään yksi nollarivi porrasmuotoon. Näinhän ominaisarvojen avulla säädetään, kun vaaditaan: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Diagonalisointi

Ominaisarvoyhtälöt ovat

$$A\mathbf{v_1} = \lambda_1\mathbf{v_1} \qquad A\mathbf{v_2} = \lambda_2\mathbf{v_2} \qquad A\mathbf{v_3} = \lambda_3\mathbf{v_3}.$$

Kun nämä kirjoitetaan vierekkäin yhdeksi matriisiyhtälöksi, saadaan

$$AV = VD, \tag{4}$$

missä D ja V ovat (2):ssa esitellyt matriisit.

Koska tässä tapauksessa $m_{-5} = M_{-5} = 2$ ja $m_{10} = M_{10} = 1$,
A:lla on $2 + 1 = 3$ lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria
eli niin monta kuin $\mathbb{R}^3$:een mahtuu.
Siis ominaisvektorimatriisi V on kääntyvä.

Yhtälö (4) voidaan siis kertoa oikealta V^{-1}:llä, jolloin saadaan A:n *diagonalisointi*

$$A = VDV^{-1},$$

missä

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Käänteismatriisi V^{-1} voitaisiin nyt laskea esim. Gauss-Jordanin algoritmilla.)

Sama Maplella ja Matlabilla

Kuten huomataan, käsinlasku alkaa olla aikalailla työlästä jo tapauksessa $n = 3$, ja edellyttää tehtävältä "harjoitus/koetehtäväkelpoisuutta" siinä mielessä, että ominaisarvojen on syytä olla pieniä kokonaislukuja, joista ainakin yksi on helppo kokeilemalla arvata. Käsinlaskemista kannattaa kuitenkin harjoitella senverran, että tulee ymmärrys asiaan. Sitten, kun se on saatu, on syytä opetella sujuvasti käyttämään (parhaita) ohjelmistoja.

Maple

```
>> with(LinearAlgebra):
>> A:=<<-5,0,0>|<27,4,18>|<9,3,1>>;
>> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tuloksena pystyvektori, jossa ominaisarvot ja matriisi, jonka sarakkeina vastaavat ominaisvektorit.

Matlab

```
>> A=[-5 27 9;0 4 3; 0 18 1]
A =
    -5    27     9
     0     4     3
     0    18     1
>> [V,D]=eig(A)
V =
    1.0000    0.8018   -0.6667        Sarakkeina ominaisvektorit
         0    0.2673   -0.2357        normeerattuina 1-vektoreiksi.
         0    0.5345    0.7071
D =
    -5     0     0                   Diagonaalimatriisi, diagonaalilla
     0    10     0                   vastaavat ominaisarvot.
     0     0    -5
```

Tästäkin näkyy, että ominaisrvot ovat yksikäsitteiset, mutta ominaisvektorit eivät.

Pohditaan asiaa lopussa lähemmin.

Matriisin diagonalisointi on erityisen kätevää Matlabilla:

```
>> VI=inv(V)    % V:n käänteismatriisi
VI =
    1.0000   -2.9314   -0.0343
         0    2.2450    0.7483
         0   -1.6971    0.8485
>> [A V*D*VI]  % Verrataan panemalla vierekkäin A ja V*D*VI
ans =
   -5.0000   27.0000    9.0000   -5.0000   27.0000    9.0000
         0    4.0000    3.0000         0    4.0000    3.0000
         0   18.0000    1.0000         0   18.0000    1.0000
```

Symbolilaskentaohjelmat, kuten Maple yrittävät laskea tarkoilla arvoilla niin pitkälle kuin mahdollista. Ominaisarvotehtävissä tämä voi yleisesti onnistua korkeintaan tapauksessa $n = 4$. Symboliohjelmissa on myös mahdollisuus liukulukulaskentaan ja niissä voidaan käskeä monet operaatiot, kuten ominaisarvotehtävät laskettaviksi numeerista menetelmää käyttäen.

Numeerisissa ohjelmissa, kuten Matlab, laskut tehdään suoraan numeerisia algoritmeja käyttäen. Periaatteellista rajoitusta matriisin koolle ei ole. Matlabilla operoiminen on puhtaasti numeerisissa tehtävissä yleensä tehokkaampaa ja suoraviivaisempaa kuin symboliohjelmalla. (Paras toimintatapa on näiden ohjelmien yhteispeli, mutta tällä kurssilla keskitymme yhteen ohjelmaan, Matlabiin. Luentodemoissa saattaa myös Maple esiintyä.)

Ovatko edellä lasketut ominaisvekorit "samat" ?

Yksinkertaista ominaisarvoa $\lambda = 10$ vastaava ominaisvektori voidaan kertoa mielivaltaisella luvulla. MATLAB normeeraa ominaisvektorit yksikkövektoreiksi. Normeerataan MAPLE:lla lasketun suuntainen vektori $[3, 1, 20]$

```
>> v1=[3 1 2]
v1 =
     3     1     2
>> v1/norm(v1)
ans =
    0.8018    0.2673    0.5345   % saatiin sama kuin eig-komennolla.
```

Kaksinkertaisen ominaisarvon suhteen on enemmän valinnan vapautta. Voidaan valita mitkä tahansa kaksi ominaisavaruuden kantavektoria.

```
>> V2=V(:,[1 3])     % Ominaisarvoa -5 vastaavat Matlabin antamat
                     % ominaisvektorit
V2 =
    1.0000   -0.6667
         0   -0.2357
         0    0.7071
>> U2=[0 1;-1/3 0;1 0]  % Vastaavat Maplen antamat.
U2 =
         0    1.0000
   -0.3333         0
    1.0000         0

>> rref([U2 V2(:,2)])   % Kuuluuko V2(:,2) Maplen antamaan ominaisavaruuteen?
ans =
    1.0000         0    0.7071
         0    1.0000   -0.6667
         0         0         0   % Kyllä!
>> rref([V2 U2(:,1)])   % Kuuluuko U2(:,1) Matlab:n antamaan ominaisavaruuteen?
ans =
    1.0000         0    0.9428
         0    1.0000    1.4142
         0         0         0  % Kyllä.
```

Siis kumpikin ominaisarvopari määrää saman ominaisavaruuden, toinen ominaisvektorihan on sama. (Ellei olisi, voitaisiin molemmat sarakkeet sijoittaa oikealle ja saataisiin asia selville myös vain kahdella komennolla.)

Teepä yllä oleva itsellesi selväksi!

Huom: On toki muitakin (helpompiakin) tapoja todeta molemmat vektoriparit saman ominaisavaruuden kannoiksi. Vaikka suoraan ominaisarvon/vektorin määritelmän ja `LRT`-toteamuksen avulla.