Matematiikan peruskurssi Mat-1.1332, KP3-ii syksy 2008
Lineaarialgebran kertausta osa 1 *Pekka Alestalo, Heikki Apiola, Kenrick Bingham*
Pruju on täällä: `http://math.tkk.fi/teaching/kp3-ii/08/L/LAkertaus1.pdf`
Liittyy Layn kirjan lukuihin $1.1 - 1.5, 1.7, 1.8$
27.10.2008

Tähän kertaustiivistelmään liittyviä asioita voi tarkemmin opiskella kurssikirjoista Lay ja Kre. Lisäksi enemmän yksityiskohtia sisältäviä Lay:n kirjaa noudattelevia prujuja voi lukea vuoden 2006-kurssimateriaalista:

`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/kalvoprujutluku1.pdf`
`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/prujutL6.pdf`

Tällä kertaa lähdetään liikkeelle sillä, viime vuoden kurssisivuilta nähtävällä ajatuksella, että nämä asiat kuuluvat pääosin peruskurssien 1 ainekseen. Toki otamme tarpeen mukaan joitakin osia uudelleenkin käsittelyyn. Kannattaa kerrata ennen kurssin alkua ainakin matriisien, yhtälösysteemien, Gaussin menetelmän yms. peruskäsitteet ja -tekniikat.

Kertauspruju jakaantuu kahteen osaan, joista ensimmäinen on tässä ja toinen käsittelee ominaisarvoja.

Kurssimateriaalit

Nopan kautta jaettavat materiaalit ovat saatavana myös (ja varmemmin ajantasaisina) kurssin luento-, harjoitus-, ja koe-hakemistoista `L,H,KOE`:

`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/L/`
`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/H/`
`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/KOE/`

1 Matriisit ja lineaariset yhtälöryhmät

1.1 Yhtälöryhmä matriisimuodossa

- $m \times n$-matriisi sisältää mn kpl reaali- tai kompleksilukuja, jotka on asetetettu suorakaiteen muotoiseksi kaavioksi:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Tässä m = rivien lkm, n = sarakkeiden lkm
- Tärkeitä erikoistapauksia: m-pystyvektori (sarakevektori), eli $m \times 1$-matriisi:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

  ja n-vaakavektori (rivivektori), eli $1 \times n$-matriisi $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$.
- Samankokoisia matriiseja voidaan **laskea yhteen** alkioittain:
  $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$.
- **Matriisi kerrotaan luvulla** (*"skalaarilla"*) niin, että kaikki matriisin alkiot kerrotaan ko. luvulla:
  $c\,[a_{ij}] = [c\,a_{ij}]$, kun $c \in \mathbb{R}$ (tai $c \in \mathbb{C}$).
- **Matriisi kertaa vektori**: Olkoon $A(\ m \times n)$-matriisi ja $\boldsymbol{x}$ n-pystyvektori. Tulo $A\,\boldsymbol{x}$ on m-pystyvektori:

$$A\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

- **Yleinen matriisitulo:** Edellinen on erikoistapaus matriisitulosta $C = AB$, missä $A(m \times n)$ ja $B(n \times p)$. **Huomaa**, että $A : n$ **sarakkeiden lukumäärä** (eli rivin pituus) $= B : n$ **rivien lukumäärä** (sarakkeen pituus). Tulomatriisi C on kokoa $m \times p$. Lyhyesti:

$$C(m \times p) = A(m \times n)B(n \times p)$$

  Tulomatriisin C alkio kohdassa ij saadaan laskemalla matriisin A i:nnen rivivektorin ja matriisin B j:nnen sarakevektorin pistetulo. Kaavan muodossa näin:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots p.$$

- Monet tavallisista laskusäännöistä ovat voimassa myös matriiseille, esim.
  $A(B + C) = AB + AC$, $A(BC) = (AB)C$, $t(AB) = (tA)B = A(tB)$, kun $t \in \mathbb{R}$.

- **Matriisitulo ei ole vaihdannainen ("kommutatiivinen")**. Kaikki laskusäännöt eivät päde. Yleensä $AB \neq BA$. Ensinnäkin molemmat tulot voidaan muodostaa vain, jos $A(m \times n)$ ja $B(n \times m)$ ja tällöin $AB(m \times m)$ ja $BA(n \times n)$. Jotta matriisit voisivat olla samat, on siten oltava $m = n$, ts. kyseesä ovat samankokoiset **neliömatriisit**. Mutta otettiinpa miltei mitkä tahansa vaikka vain 2×2-matriisit A ja B, niin $AB \neq BA$. Kokeile, käsin tai esim. MATLAB:llä vaikka tähän tapaan:

```
>> A=[1 2;3 4]          >> B=[1 3;-1 0]
A =                     B =
     1     2                 1     3
     3     4                -1     0

>> A*B  % Jätetään tulostukset näyttämättä
>> B*A  % Laske itse sekä käsin että Matlabilla.
```

- Erityisiä matriiseja:
  - nollamatriisi O, jossa kaikki alkiot nollia;
  - neliömatriisi, jossa $m = n$.
    Erityisiä neliömatriiseja
    * lävistäjämatriisi D, jossa vain lävistäjän alkiot d_{ii} voivat olla $\neq 0$
    * yksikkömatriisi I, jossa kaikki lävistäjän alkiot $= 1$, muut $= 0$.
    * käänteismatriisi A^{-1}, jolle $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; vain osalla neliömatriiseista on käänteismatriisi.

- Matriisin A transpoosi A^T saadaan vaihtamalla rivit sarakkeiksi; erityisesti pystyvektorin transpoosi on vaakavektori.
  Aina pätee $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(AB)^T = B^T A^T$

- **Lineaarinen yhtälöryhmä** on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

  missä yhtälöryhmän **kertoimet** a_{ij} ja luvut b_i on annettu: tarkoituksena on ratkaista tuntemattomat x_j, $1 \leq j \leq n$.

- Kertoimista a_{ij} voidaan muodostaa yhtälöryhmän kerroinmatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

  joka on $m \times n$-matriisi. Jos vielä määritellään pystyvektorit $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ ja $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_m]^T$, niin alkuperäinen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa **matriisimuodossa** lyhyesti $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Yhtälöryhmän ratkaisujen lukumäärä, eli erilaisten $\mathbf{x}$-vektoreiden määrä voi olla joko 0, 1 tai ∞: jos nimittäin löydetään kaksi eri ratkaisua $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$, niin havainnollisesti ajatellen löydetään uusi ratkaisu $\boldsymbol{z}$ vektorien $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ kärkiä yhdistävän janan puolivälistä. Lasku on tässä: $\boldsymbol{z} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}$.

$$A\boldsymbol{z} = A(\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}A\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}A\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

  Niinpä ei ylärajaa ratkaisujen lukumäärälle voi olla, sillä jos niitä olisi tasan M kpl ($M \geq 2$), niin yllä sanotusta seuraisi, että niitä olisikin $M + 1$ kpl (tai vaikka $2(M-1)$ kpl.)

  Asiaa havainnollistavat suorat tasossa tai tasot avaruudessa, näitä tuttuja kuvia on myös prujussamme s. 1–2. `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/kalvoprujutluku1.pdf`

1.2 Gaussin eliminointimenetelmä

Yksityiskohtaisesti, esimerkeillä valaisten `prujussa,ss.1-10.`

- **Gaussin eliminointimenetelmä:** Muodostetaan täydennetty matriisi, "liitännäismatriisi" (augmented matrix) liittämällä yhtälöryhmän $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ oikean puolen $\boldsymbol{b}$-vektori A:n sarakkeiden perään.

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

  Muunnetaan tämä **rivioperaatioiden** avulla **(rivi)porrasmuotoon**(**r***ow* **e***chelon* **f***orm*, lyh. *ref*), ja muodostetaan ratkaisu **takaisinsijoitusten** (*back substitution*) avulla. Tässä muodossa:

  - *Tukialkio* ("pivot") on nollasta poikkeavan rivin ensimmäinen nollasta poikkeva alkio. (Nollarivillä ei siis ole tukialkiota.)
  - *Tukisarake* on sarake, jossa on tukialkio.

- Rivioperaatioita ovat

  - matriisin kahden rivivektorin vaihtaminen keskenään,
  - rivivektorin kertominen nollasta poikkeavalla luvulla,
  - rivivektorin kertominen luvulla ja tuloksen lisääminen toiseen rivivektoriin. (Vain tämä "toinen" rivivektori muuttuu.)

  Huom: Rivioperaatioissa yhtälöryhmän ratkaisut eivät muutu! (Kts. `prujus.3-4` , "riviekvivalentit ovat ekvivalentit").

- Matriisi on **porrasmuodossa**, jos

  - pelkistä nollista koostuvat rivit ovat alimmaisina.
  - Nollasta poikkeavien rivien tukialkiot muodostavat porrasmaisen rakenteen, ts. kunkin tällaisen rivin tukialkio on edellisen rivin tukialkion oikealla puolella (yhden tai useamman askeleen verran). Toisin sanoen kaikille $1 \leq i \leq m-1$ on voimassa: $(i+1)$:n rivin alussa on enemmän nollia kuin i:nnen rivin alussa, paitsi siinä tapauksessa, että i. rivi koostuu pelkistä nollista.

  Tyypillinen porrasmuoto on tässä:

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  $\blacksquare$: rivin 1. nollasta poikkeva alkio, **tukialkio** (pivot).
  $*$: mikä tahansa luku (0 tai $\neq 0$).

  Mustien neliöiden $\blacksquare$ määräämät sarakkeet ovat siis *tukisarakkeita* ja tukialkion alapuolinen sarakkeen osa koostuu nollista.

- Rivioperaatioiden avulla kaikki matriisit voidaan muuntaa porrasmuotoon. Porrasmuodon rakenne (portaiden "muoto") määräytyy yksikäsitteisesti.

  Täydennetyn eli liitännäismatriisin riviporrasmuodosta voidaan nähdä, onko lineaarisella yhtälöryhmällä ratkaisuja:

  - Jos siinä on rivi $[0\,0\,\cdots\,0\,|\,c]$, missä $c \neq 0$, ratkaisua ei ole
    (em. rivi vastaa ristiriitaista yhtälöä $0x_1 + \cdots + 0x_n = c$).
  - Muussa tapauksessa:
    * Jos A:n jokainen sarake on tukisarake, ratkaisuja on tasan yksi (koska tällöin voidaan ratkaista takaisinsijoittamalla ensin x_n, sitten x_{n-1} jne.)
    * Muussa tapauksessa ratkaisuja on äärettömän monta (kutakin ei-tukisaraketta vastaava muuttuja jää vapaaksi).

- **Homogeeniyhtälö** $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Olkoon A $(m \times n)$. Jos $n > m$ (enemmän sarakkeita kuin rivejä, enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä), niin homogeeniyhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ on epätriviaaleja ratkaisuja (ääretön määrä).

  Tod: Homogeeninen yhtälöryhmä on aina konsistentti (Nollavektori on ratkaisu (tai porrasmuotoajattelulla: siinä ei ole riviä $[0\,0\,\cdots\,0\,|\,c],\quad c \neq 0$)).
  Tukisarakkeiden lkm $\leq m < n$, joten ainakin yksi vapaa muuttuja, $\Rightarrow$ äärettömän monta ratkaisua.

- Matriisin $A(m \times n)$ **rangi** r on *ref*-muodon **nollasta poikkeavien rivien lukumäärä = tukialkioiden lukumäärä = tukisarakkeiden lukumäärä**. Se paljastaa matriisin (yhtälöryhmän) riippumattomien rivien lukumäärän. (Seuraavassa kohdassa lisää.)
  Merk. $r = r(A)$ tai $\operatorname{rg} A$. Tietenkin $r \leq m$ ja $r \leq n$.

1.3 $A\boldsymbol{x} = A$:n sarakevektorien lineaarikombinaatio

Kyse on yksinkertaisesta, mutta erittäin hyödyllisestä havainnosta. Joissakin prujuissani olen käyttänyt nimityksiä *riviajattelu* vs. *sarakeajattelu*.

Olkoon

$$A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\,\mathbf{a}_n,$$

missä $\mathbf{a}_j$:t ovat A :n sarakevektorit.

Vektoriyhtälö $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ palautuu siten matriisimuotoon: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, missä A koostetaan latomalla vektorit $\mathbf{a}_j$ vierekkäin sarakkeiksi.
Tämä on erityisen hyödyllistä tarkasteltaessa kysymyksiä vektorijoukon lineerisesta riippumattomuudesta ja virittämisestä, ts. annetun vektorin ($\boldsymbol{b}$) lausumisesta annettujen vektorien $\mathbf{a}_j$ lineaarikombinaationa.

1.4 Kanta, dimensio, rangi $A(m \times n)$

Kts. tarkemmin: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/prujutL6.pdf`,
`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/kalvoprujutluku1.pdf`

- Vektoriavaruuden X kanta on $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ on lineaarisesti riippumaton `LRT` vektorijoukko, joka virittää X:n. Jokaisella vektorilla $\boldsymbol{x} \in X$ on yksikäsitteinen esitys kantavektorien lineaarikombinaationa:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{N} c_k\,\boldsymbol{x}_k.$$

  Jokaisessa X:n kannassa on yhtä monta vektoria.

- Vektoriavaruuden X **dimensio** on sen (minkä tahansa) kannan vektorien lukumäärä. Jos $N = \dim(X)$, niin N on maksimaalinen määrä `LRT` vektoreita, joka "mahtuu" avaruuteen X. Se on myös minimaalinen määrä vektoreita, joka riittää virittämään X:n.

- *Sarakeavaruus* $\operatorname{col} A = A$:n sarakevektorien virittämä $\mathbb{R}^m$:n aliavaruus $= \{A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$. (Juuri äskenhän todettiin, että $A\boldsymbol{x} = A$:n sarakevektorien lineaarikombinaatio, kertoimina vektorin $\boldsymbol{x}$ komponentit.)
  Kysymys, päteekö $\boldsymbol{b} \in \operatorname{col} A$, palautuu siten täydennetyn matriisin $[A \mid \boldsymbol{b}]$ porrasmuodon katsomiseen: Vastaus on myönteinen, jos ja vain jos viimeinen sarake ei ole tukisarake.
  Sarakeavaruuden kanta saadaan poimimalla A-matriisista ne sarakkeet, jotka vastaavat porrasmuodon tukisarakkeita. (Näitä sanotaan A:n tukisarakkeiksi.) **Huom:** Vaikka monet ominaisuudet säilyvät rivioperaatioissa, niin sarakeavaruus ei yleensä säily. Syy: Rivioperaatiot eivät ole sarakevektorien kannalta vektorilaskentaa, esim. skalaarilla kerrottaessa, eri komponentit kerrotaan eri luvuilla. Siksi **sarakeavaruuden kantaa ei saada poimia porrasmuodosta**, sillä kyseiset vektort eivät yleensä kuulu sarakeavaruuteen.

- *Riviavaruus* $\operatorname{row} A = A$:n rivivektorien virittämä $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus. Rivioperaatioissa riviavaruus säilyy, siispä riviavaruuden virittävät porrasmuodon nollasta poikkeavat vektorit. Koska ne selvästi ovat `LRT`, ne muodostavat riviavaruuden kannan.
  Koska transpoosin A^T sarakkeet ovat samoja kuin A:n rivit, voidaan riviavaruuden kanta vaihtoehtoisesti määrittää muodostamalla A^T:n kanta. Tai toisinpäin. Huomaa, että avaruuden kanta on kaikkea muuta kuin yksikäsitteinen, joten tulos on yleensä aivan toisennäköinen.
  Jos tehtävänä on määrittää sekä $\operatorname{col} A$:n että $\operatorname{row} A$:n kanta, niin ei ole syytä transponoida, koska ensinmainitulla tavalla laskien saadaan molemmat samaa porrasmuotoa käyttäen.

- **Rangi, “Lineaarialgebran ihme”**

  $m \times n$-matriisin *rangi* $r(A) = \dim(\operatorname{col}(A))$.

  Tämä on siis sama, kuin matriisin tukisarakkeiden lukumäärä = tukialkioiden lukumäärä = porrasmuodon nollasta poikkeavien rivien lkm = riviavaruuden dimensio.

  Toden totta: Maailman jokaisessa matriisissa, olipa se korkea tai leveä, lihava tai laiha, $\boxed{\text{on yhtä monta LRT riviä kuin sarakettakin.}}$ Eikö tätä voi kutsua ihmeeksi?!

  Aina pätee tietysti: $r(A) \le m$ ja $r(A) \le n$.

  Rangin määrittäminen tapahtuu siis saattamalla matriisi porrasmuotoon. Rangi on porrasmuodon alimman nollasta poikkeavan rivin rivi-indeksi, eli siis nollasta poikkeavien rivien lukumäärä eli tukialkioiden lkm jne. (yllä jo sanottiin).

- *Nolla-avaruus* $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0\}$ on siis homogeeniyhtälön $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujoukko.
  $n(A) = \dim N(A)$ on matriisin A porrasmuodosta paljastuva vapaiden muuttujien lukumäärä, ts. ei-tukisarakkeiden lukumäärä.

- Dimensiolause (lineaarialgebran peruslause):
  $r(A) + n(A) = n$, kun A on $m \times n$-matriisi

1.5 Käänteismatriisi, $A(n \times n)$ neliömatriisi

`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/prujutL6.pdf`

- Neliömatriisin A käänteismatriisi A^{-1} tarkoittaa matriisia, jolle $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Kaikilla neliömatriiseilla ei (tietenkään) ole käänteismatriisia.

- Jos on olemassa A^{-1}, niin yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ainoa ratkaisu on $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Erityisesti, jos $\mathbf{b} = \bar{0}$ ja A^{-1} on olemassa, niin ainoa ratkaisu on $\mathbf{x} = \bar{0}$.

- Gaussin menetelmässä eliminointia voidaan jatkaa vielä niin, että muunnetaan rivioperaatioiden avulla $[A|\mathbf{b}] \to [I|\mathbf{c}]$, jolloin $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ on etsitty yhtälöryhmän ratkaisu. Tämä onnistuu ainoastaan siinä tapauksessa, että yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa eli silloin, kun $r(A) = n$. Käytännössä tämä menetelmä vaatii kuitenkin enemmän laskutoimituksia kuin takaisinsijoitus. Se soveltuukin paremmin käänteismatriisin muodostamiseen.

- Käänteismatriisin muodostaminen Gaussin ja Jordanin eliminointimenetelmän avulla: Annettu $(n \times n)$-neliömatriisi A, muodostetaan täydennetty $(n \times 2n)$-matriisi $[A|I]$, missä I on $(n \times n)$-yksikkömatriisi, ja muunnetaan $[A|I]$ rivioperaatioilla muotoon $[I|B]$. Jos tämä onnistuu, niin $A^{-1} = B$; ellei vasemmalle puolelle saada yksikkömatriisia rivioperaatioiden avulla, niin käänteismatriisia ei ole olemassa.

- Perustelu: $A^{-1}\mathbf{e}_1$ = matriisin A^{-1} ensimmäinen sarakevektori $\mathbf{x}^{(1)} \Rightarrow$ matriisin A^{-1} ensimmäinen sarakevektori on yhtälöryhmän $A\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{e}_1$ ratkaisu. Vastaavasti toinen sarakevektori $\mathbf{x}^{(2)}$ on yhtälöryhmän $A\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{e}_2$ ratkaisu, jne. Kun kaikki nämä n yhtälöä ratkaistaan Gaussin eliminointimenetelmällä, voidaan tämä tehdä yhdellä kertaa muuntamalla täydennetty matriisi

$$[A|\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_2|\ldots|\mathbf{e}_n] = [A|I]$$

muotoon

$$[I|\mathbf{x}^{(1)}|\mathbf{x}^{(2)}|\ldots|\mathbf{x}^{(n)}] = [I|A^{-1}].$$

rivioperaatioiden avulla.

1.6 Matriisin determinantti, $A(n \times n)$ neliömatriisi

`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/prujutL6.pdf`
`http://math.tkk.fi/opetus/k3/04/L/DetInv.pdf`

- Determinantti määritellään alideterminanttien avulla. Alkiota a_{ij} vastaava $(n-1) \times (n-1)$-alimatriisi A_{ij} saadaan, kun poistetaan A:sta i. rivi ja j. sarake.
- $\det A = \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ (kehitetään j:nnen sarakkeen mukaan) $= \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ (kehitetään i:nnen rivin mukaan).
- **Determinanttien kertosääntö** $\det(AB) = \det A \det B$.
  Tästä seuraa heti: Jos on olemassa A^{-1}, niin $\det A \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$, joten $\det(A) \neq 0$ ja $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
- Determinantin suhtautuminen rivi/sarakeoperaatioihin:

  Jos rivit vaihdetaan, merkki vaihtuu.

  Jos rivi kerrotaan luvulla, determinantin arvo tulee kerrotuksi tuolla luvulla.

  Rivioperaatiossa $\boldsymbol{r}_i \leftarrow c\,\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{r}_i, \quad k \neq i$ determinantin arvo säilyy.

  Edellä "rivi" voidaan korvata "sarakkeella".
- **Determinantin laskenta**: Muunnetaan matriisi A rivioperaatioilla porrasmuotoon, jolloin $\det A = (-1)^q \times$ diagonaalialkioiden tulo, missä q on rivinvaihtojen lukumäärä.
  Huomaa: Rivin **skaalausta ei sallita** (paitsi jos halutaan välttämättä laskea väärin).
  Determinantin arvon laskenta: Tapauksessa $n = 3$ voidaan käyttää determinantin kehittämistä sarakkeen tai rivin mukaan. Jos $n > 3$, tämä alkaa olla toivottoman työlästä, tapauksessa $n = 25$ tämä laskutapa kestää nopeimmalla supertietokoneella n. 500000 vuotta!!

1.7 Käänteismatriisilause

`http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/prujutL6.pdf`

Käänteismatriisilause (Layssa monta versiota eri paikoissa)
Seuraavat ovat yhtäpitävät ($A(n \times n)$):

1. A on kääntyvä
2. $r(A) = n$
3. $\det(A) \neq 0$
4. $N(A) = \{0\}$ $(n(A) = 0)$
5. A:n sarakkeet ovat LRT ($\iff$) virittävät $\mathbb{R}^n : n$
6. A:n rivit ovat LRT ($\iff$) virittävät $\mathbb{R}^n : n$
7. (HY):llä $A\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ vain triviaaliratk. $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
8. (EHY):llä $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on ratkaisu $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

Käytännön laskenta: Sekä determinantti että käänteismatriisi ovat hyödyllisiä teoriassa, matriisilausekkeissa ym. Yleensä niitä ei kannata laskea. Käänteismatriisin sijasta muodostetaan ns. `LU`-hajotelma ja determinantin sijasta numeerisessa lineaarialgebrassa käytetään ns. häiriöalttiutta kuvaamaan yhtälösysteemin lähes singulaarisuutta.

— Näistä tarkemmin tämän vuoden 2008 kurssilla. —

Viitteet

[Lay] *David C. Lay.* Linear Algebra and its Applications, 3^{rd} ed., Adison Wesley.

[KRE] *Erwin Kreyszig.* Advanced Engineering Mathematics, 9^{th} ed., Wiley (Myös vanhemmat käyvät.)