

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Tikanmäki

Tentti 7.2.2009

Laskin sallittu (Siis sellainen, joka kelpuutetaan ylioppilaskirjoituksiin)

Huom! Laskujen välivaiheiden tulee olla näkyvissä. Jos laskimella saisi yhtälösystemin ratkaisun, LU-hajotelman, ominaisarvot yms., niin sillä ei pistetili aukeaisi.

1. Määritä LU-hajotelma (ilman rivinvaihtoja) matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

ja ratkaise sen avulla yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä $\mathbf{b} = [1, -1, \frac{1}{2}]^T$.

2. (a) Kirjoita (ylimääräytyvä) yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

matriisimuotoon ja ratkaise pienimmän neliösumman mielessä. Piirrä suorat ja ratkaisupiste tasoon.

- (b) Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osoita laskemalla, että $A^3 = \mathbf{O}$ (nollamatriisi), ja muodosta tätä tietoa käyttäen e^{At} .

3. Ratkaise alkuarvottehtävä $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.4 \end{bmatrix}$$

4. Muunna yhtälö $y'' + \cos y = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi, määritä kaikki kriittiset pisteet ja selvitä niiden tyyppi ja stabiilisuus suorittamalla ensin linearisointi niissä.

5. Sivuiltaan lämpöeristetyin sauvan ($c = 1$) pituus olkoon $L = 1$. Alkuhetkellä $t = 0$ sauvan lämpötila noudattaa sinimuotoista funktiota:

$$u(x, 0) = f(x) = 100 \sin \pi x, \quad 0 < x < 1.$$

Sauvan päät sijoitetaan jääveteen, 0°C , ts. sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$ toteuttaa reunaehdot $u(0, t) = u(1, t) = 0$ kaikkina aikoina t .

Eksplisiittinen iteraatiokaava saa yksinkertaisimman muotonsa

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}),$$

kun valitaan

$$r = \frac{1}{2}, \quad \text{missä } r = \frac{k}{h^2} \quad (h = \Delta x, \quad k = \Delta t).$$

Olkoon $h = 0.2$. Minkä arvon lämpötila saa tällä laskentamenetelmällä ja -hilalla pisteessä $x = 0.2$ ajanhetkellä $t = 0.04$?

Laskentatarkkuudeksi riittää 4 numeroa.