

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2008

<http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08>

Laskuharjoitus 2 AV (viikko 46 , 10 – 14.11.2008)

Matriisikertausta:

<http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08/LAkertaus1.pdf>

<http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08/LAkertaus2.pdf>

<http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/ominaisarvot.pdf>

Luentosuunnitelma <http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/Luennot.html>

Lyhyt Matlab-opas:

<http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/>

Tällä viikolla AV-harjoitus suoritetaan liitutauluktyylillä, LV-harjoitus on tietokone-harjoitus MATLAB-ohjelmaa käyttäen. Tehtävät siihen erikseen.

Alkuviikko

1. Muodosta matriisiin $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ LU-hajotelma. Rutiinilaskentatyön

vähentämiseksi annetaan: $U = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 16/3 & 11 \\ 0 & 0 & 3/8 \end{bmatrix}$

Tarkistus MATLAB:lla: tietysti $L*U$. LU-hajotelman laskeminen: $[L,U,P]=lu(A)$.

2. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 0.0001x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Tarkka ratkaisu on $[\frac{2}{1.9999}, \frac{3.9997}{1.9999}]^T$, joka 5:llä numerolla esitettynä on $[1.0001, 1.9999]^T$.

(a) Ratkaise yhtälösystemi niin, että suoritat laskut (järjestystä vaihtamatta) 3:lla merkitsevällä numerolla. (Laske laskimella, Matlabilla tms. ja pyöristä kunkin operaation jälkeen tulos 3:een numeroon.)

(b) Tee samoin kuin (a)-kohdassa, mutta vaihda yhtälöiden järjestys.

Selitä, miksi (a)-tapauksessa tulee suuri suhteellinen virhe (100%:n suhteellinen virhe toisessa komponentissa), kun taas (b)-tapauksessa virhe on olematon.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = [8 \ 1 \ 4]^T$. Ratkaise yhtälö

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ osittaistuenta ("partial pivoting") käyttäen.

Olkoon P permutaatiomatriisi (rinvaihtomatriisi), joka määräytyy rivien vaihdoista. Muodosta hajotelma $PA = LU$.

MATLAB:lla: `help lu, [L,U,P]=lu(A)` (Tämä siis vertailun vuoksi, tarkoitus on laskea käsin.)

Huom: Osittaistuenta tarkoittaa itseisarvoltaan suurimman tukialkion valitsemista pienen tukialkion aiheuttamien numeeristen ongelmien välttämiseksi. MATLAB saattaa käyttää esim. ns. skaalattua osittaistuenta, jolloin rinvaihtostrategia voi olla erilainen.

4. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

5. Olkoon $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

(a) Voidaanko A diagonalisoida?

(b) Laske potensseja A^2, A^3, \dots ja päättele, millaista muotoa A^n on yleisesti.

6. Neliömatriisit A ja B ovat *similaariset*, jos on olemassa kääntyvä matriisi S siten, että $B = SAS^{-1}$

(a) Osoita, että similaarisilla matriiseilla on sama karakteristinen polynomi ja siten samat ominaisarvot.

(b) Osoita, että jos \mathbf{x} on A :n ominaisvektori, niin $S\mathbf{x}$ on B :n ominaisvektori.

Vihje (a): $SAS^{-1} - \lambda I = S(A - \lambda I)S^{-1}$.