1.4 Matriisiyhtälö $\mathbf{Ax = b}$

(Matriisi $\times$ vektori) - tulon sarakemuoto

Olkoon A $m \times n$ matriisi, jonka sarakevektoreita merkitään: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ja olkoon $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Tulo $A\mathbf{x}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$x_1\ \mathbf{a}_1 + x_2\ \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

Esimerkki:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 - 4\,x_2 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \\ 5\,x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Yleisesti

$$A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

Kolme tapaa katsoa lineaarista systeemiä:

1. Lineaarisena yhtälösysteeminä (Luentojen 1. kalvo)
2. Vektoriyhtälönä $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$
3. Matriisiyhtälönä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

LAUSE 3 (Lay s. 42)

Olkoon A $m \times n$ matriisi, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, ja olkoon $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Tällöin lineaarisella yhtälösysteemillä

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

on samat ratkaisut kuin vektoriyhtälöllä

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Toisin sanoen vektoriyhtälö ratkaistaan liitännnäismatriisin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

avulla.

Hyödyllinen tosiasia:

Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisu(ja), jos ja vain jos $\mathbf{b}$ on $A : n$ sarakevektorien

——————————————————————————

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Onko yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsistentti kaikilla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$?

Ratkaisu: Liitännäismatriisi yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ -3 & -11 & -14 & b_2 \\ 2 & 8 & 10 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_3 \end{bmatrix}$$

Voiko siis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mitenkään olla konsistentti kaikilla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$?

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{array} \end{array}$$

Yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on konsistentti, jos ja vain jos $-2b_1 + b_3 = 0$. (tason yhtälö $\mathbb{R}^3 : ssa$)

$\mathbf{b}$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_3 + x_3\mathbf{a}_3$$

jos ja vain jos $b_3 - 2b_1 = 0$.

A :n sarakkeet virittävät tason $\mathbb{R}^3$:ssa

Pohdittavaksi:

Millähän ehdolla matriisin A $(m \times n)$ sarakkeet virittävät koko avaruuden $\mathbb{R}^m$, eli millon on $\mathrm{sp}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} = \mathbf{R}^m$

LAUSE 4

Olkoon A $m \times n$ matriisi. Seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitävät:

a. Jokaisella $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisu.

b. Jokainen $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ on A :n sarakkeiden lineaarikombinaatio. (Ts. A :n sarakkeet virittävät $\mathbb{R}^m$:n.)

c. A :n jokainen rivi on tukirivi, ts. *ref* (A):ssa ei ole yhtään nollariviä.

Tod:

(a) $\iff$ (b) todettiin juuri.

(c) $\implies$ (a): Jos A:ssa ei ole nollarivejä, voidaan kaikki yhtälöt ratkaista ref-muodosta takaisinsijoituksella (ristiriitaisia yhtälöitä ei synny). Vapaita parametrejä voi tulla, mutta nehän vaan lisäävät ratkaisujoukkoa.

(a) $\implies$ (c): Jos ratkaisu on jokaisella $\vec{b}$, niin se on sellaisellakin, joka rivioperaatioissa muuntuu vaikkapa vektoriksi $[0, \ldots, 1]^T$ (Koska käänteisoperaatioilla päästään takaisin tuohon "sellaiseen"$\vec{b}$.)
Mutta tällöinhän alin rivi ei voi olla nollarivi.

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Onko yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsistentti kaikilla mahdollisilla $\mathbf{b}$?

Ratk: A:lla on vain _____ saraketta ja siksi korkeintaan _____ tukiriviä.

Esim: Virittävätkö A :n sarakeet $\mathbb{R}^3$:n, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

Ratkaisu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \sim$$

Paljastuu 1. rivioperaatiossa!

— 1.4 loppuu tähän —