Mat-1.4334 peruskurssit
KP3-II

L 2

HA

2. marraskuuta 2006

1.2: Riviporrasmuotojen *ref* ja *rref* yleinen rakenne

Sopimus: Nollarivi/sarake on sellainen (ja vain sellainen), jonka kaikki alkiot $= 0$. *Kysymys on siis nollavektorista. Siten nollasta poikkeava on sellainen, jonka yksikin alkio* $\neq 0$.

(Rivi)porrasmuoto, *"Row Echelon Form"*

1. Jokainen nollasta poikkeava rivi on kunkin nollarivin yläpuolella. (Ts. nollarivit ovat pohjalla.)

2. Jokaisen ei-nollarivin johtava alkio (ts. ensimmäinen nollasta poikkeava alkio) on aidosti oikealla edellisen rivin johtavaa alkiota. (Ts. aina muodostuu ainakin 1:n pituinen porras.)

3. Kunkin johtavan alkion alapuolinen sarakkeen osa koostuu nollista.

ESIMERKKI: Porrasmuotoisia matriiseja

(a) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{bmatrix}$

Redusoitu porrasmuoto (rref): Edellisten ehtojen 1, 2, 3 lisäksi nämä:

4. Jokaisen nollasta poikkeavan rivin johtava alkio on 1.
5. Johtavan alkion määräämän sarakkeen yläpuolinenkin osa koostuu nollista, ts. johtava 1 on tällaisen sarakkeen ainoa nollasta poikkeva alkio.

Redusoitu porrasmuoto (rref) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$$

Lause 1 [porrasmuotolause, ref-lause]

1. Jokainen matriisi on riviekvivalentti porrasmuotoisen matriisin kanssa.
2. Jokainen matriisi on riviekvivalentti redusoidun porrasmuotoisen matriisin kanssa. Tämä rref-muoto on yksikäsitteinen.

Tärkeät termit: Tukialkio, tukisarake ("pivot")

- **tukialkio:** porrasmuodossa olevan matriisin nollasta poikkeavan rivin 1. nollasta poikkeva alkio, ts. rivin "johtava alkio".
- **tukisarake:** porrasmuodossa olevan matriisin sarake, joka sisältää tukialkion, ts. sama kuin "johtava sarake". Alkuperäisen matriisin **tukisarakkeiksi** kutsutaan niitä sarakkeita, jotka ovat porrasmuotoon saatetun matriisin tukisarakkeiden kohdilla.

Huom! Lauseessa 1 (reflause) todetaan, että rref-muoto on yksikäsitteinen. Sensijaan ref-muoto ei ole, pelkästään rivin skaalauksella saadaan uusia ref-muotoja. Tukisarakkeiden paikat sensijaan ovat samat kaikissa ref-muodoissa, koska siirtyminen ref-muodosta (yksikäsitteiseen) rref-muotoon ei paikkoja muuta.

ESIMERKKI: Muunna matriisi porrasmuotoon ja paikanna tukisarakkeet.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

- 1. rivi ja 4. rivi vaihdetaan $\Rightarrow$ Tukialkio on 1 ja 1. sarake on tukisarake.

- Nollataan tukialkion 1 avulla 1. sarakkeen alaosa.
- 2. sarake on tukisarake, otetaan tukialkioksi 2 (ei rivinvaihtoja)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{Alkuperäinen matriisi:} \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{lccccc} & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{tukisarakkeet:} & 1 & 2 & & 4 & \end{array}
$$

Huom!

- Kullakin rivillä on korkeintaan yksi tukialkio.
- Kullakin sarakkeella on korkeintaan yksi tukialkio.
- Tukisarakkeiden lukumäärä = porrasmuodon nollasta poikkeavien rivien lkm.

ESIMERKKI: (a) Saata matriisi rivioperaatioilla porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim
$$

$$
\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \leftarrow \text{tässäpä porrasmuoto (ref)}
$$

(b) Redusoitu porrasmuoto (rref):

Aloitetaan oikeanpuolimmaisesta tukisarakkeesta, joka tässä on viimeistä edellinen (kerroinmatriisin viimeinen). Jos kyseessä on yhtälösysteemin liitännäismatriisi (kuten yleensä on), niin viimeistä saraketta ei tarvitse ryhtyä nollaamaan. Jos se nimittäin on tukisarake, ei ratkaisuja ole, ja koko homma voidaan lopettaa. Nollataan alhaalta ylös ja siirrytään oikealta vasemmalle seuraavaan tukisarakkeeseen.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Harjoittele: Kirjoita yhtälösysteemin $A\,\vec{x} = \vec{b}$ yleinen ratkaisu (a) käyttäen yllä olevaa ref-muotoa, (b) rref-muotoa, kun liitännäismatriisi $\begin{bmatrix} A & | & \vec{b} \end{bmatrix}$ on edellisen tehtävän matriisi.

Lineaaristen yhtälösysteemien ratkaisut

- **kantamuuttuja:** muuttuja, joka vastaa tukisaraketta.
- **vapaa muuttuja:** ei-kantamuuttuja.

ESIMERKKI:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{rrrrrl} x_1 & +6x_2 & & +3x_4 & & = 0 \\ & & x_3 & -8x_4 & & = 5 \\ & & & & x_5 & = 7 \end{array}$$

tukisarakkeet:

kantamuuttujat:

vapaat muuttujat:

Konsistentin lineaarisen systeemin yleinen ratkaisu:

Kun systeemi on saatettu porrasmuotoon, saadaan ratkaisu(t) ns. **takaisinsijoituksella**. Ratkaisut voidaan kirjoittaa alhaalta ylös. Jokainen vapaa muuttuja jää vapaasti valittavaksi parametriksi. Jos systeemi on saatettu rref-muotoon, on ratkaisu vielä helpompaa ja voidaan suorittaa ylhäältä alas.

ESIMERKKI: Olkoon systeemin liitännäismatriisi saatettu rivioperaatioilla porrasmuotoon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Ratkaise vastaava yhtälösysteemi.

Ratkaisu: Tukisarakkeet ovat $1., 3., 5.$ Siis konsistentti. (miksi?)

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & +6x_2 & & +3x_4 & & = 0 \\ & & x_3 & -8x_4 & & = 5 \\ & & & & x_5 & = 7 \end{array}\right| \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ vapaa} \\ x_3 = 5 + 8x_4 \\ x_4 \text{ vapaa} \\ \mathrm{x}_5 = 7 \end{cases}$$

Tässä on systeemin yleinen ratkaisu, vapaat muuttujat ovat vapaasti valittavia parametrejä (voitaisiin selvyyden vuoksi merkitä vaikkapa $x_2 = s, \quad x_4 = t$)

(**Tukisarakkeet:** Todettiin jo: 1, 3, 5)

Olemassolo- ja yksikäsitteisyys/lukumääräpäätelmät yleisesti

ESIMERKKI:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 3x_2 & -6x_3 & +6x_4 & +4x_5 & = -5 \\
3x_1 & -7x_2 & +8x_3 & -5x_4 & +8x_5 & = 9 \\
3x_1 & -9x_2 & +12x_3 & -9x_4 & +6x_5 & = 15
\end{array}
$$

Aiemmassa esimerkissä saatiin porrasmuoto:

$$
\begin{bmatrix}
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\
0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{bmatrix}
\quad (x_5 = 4)
$$

Muotoa $0 = c$, ($c \neq 0$) olevaa yhtälöä ei ole, joten systeemi on konsistentti·

Vapaat muuttujat: x_3 and x_4

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Konsistentti systeemi}\\ \textbf{Vapaita muuttujia on}\end{array}} \Longrightarrow \textbf{Äärettömän monta ratkaisua}$$

ESIMERKKI:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +4x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & +5x_2 & = & 5 \\ -2x_1 & -3x_2 & = & 1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$3x_1 \quad + \quad 4x_2 = -3$$

$$x_2 = 3$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Konsistentti systeemi,}\\ \textbf{Ei vapaita muuttujia}\end{array}} \Longrightarrow \textbf{Yksikäsitteinen ratkaisu.}$$

Lause 2 (Olemassolo- ja yksikäsitteisyyslause)

1. Lineaarinen systeemi on konsistentti, jos ja vain jos liitännäismatriisin viimeinen sarake (tunnettujen lukujen vektori $\vec{b}$) ei ole tukisarake, ts. liitännäismatriisin porrasmuodossa ei ole yhtään riviä, joka olisi tyyppiä
$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & b \end{bmatrix} \text{ (missä } b \neq 0)$$
2. Jos lineaarinen systeemi on konsistentti, niin ratkaisuja on (a) Joko yksi tai (b) ääretön määrä.
   (a) $\iff$ Jokainen sarake on tukisarake
   (b) Vapaa muuttuja jokaista ei-tukisaraketta kohti

Resepti lineaarisen yhtälösysteemin ratkaisemiseksi

1. Muodostetaan liitännäismatriisi ja muokataan se Gaussin rivioperaatiilla porrasmuotoon.
2. Katsotaan (pohjalla olevia) kerroinmatriisin nollarivejä, jos niitä on. Mikäli tässä paljastuu muotoa $[0, \ldots, 0, c]$, $c \neq 0$ oleva rivi, ei systeemillä ole ratkaisuja. (Lopeta tähän.)
3. Ellei kohdan 2. tilannetta esiinny, saadaan ratkaisu takaisinsijoituksella alhaaalta ylös. Tässä jokainen mahdollinen ei-kantamuuttuja (sellainen, joka vastaa ei-tukisaraketta) on vapaa parametri. (Jos kaikki ovat kantamuuttujia, on ratkaisu yksikäsitteinen.)

3'. Vaihtoehtoisesti voidaan jatkaa rivioperaatioita alhaalta ylös rref-muotoon saakka, jolloin takaisinsijoitusvaihe sisältää pelkästään toisistaan riippumattomien 1. asteen yhtälöiden ratk.

Kysymyksiä:

Huomaa! Kun puhutaan $m \times n-$systeemistä, viitataan *kerroinmatriisin* kokoon (liitännäismatriisissa on yksi sarake enemmän).

a) Miten monta tukialkiota (tukisaraketta) voi 4×6-systeemillä korkeintaan olla?

b) Miten monta tukialkiota (tukisaraketta) voi 6×4-systeemillä korkeintaan olla?

c) Kuinka paljon ratkaisuja on konsistentilla systeemillä, jossa on **3** yhtälöä ja 4 tuntematonta?

d) Oletetaan, että $4 \times 6-$systeemin kerroinmatriisilla on **3** tukisaraketta. Kuinka monta tukisaraketta on liitännäismatriisilla, jos systeemi on epäkonsistentti?