1.5 Homogeeninen lineaarinen systeemi $A\vec{x} = \vec{0}$

(A ($m \times n$) ja $\mathbf{0}$ on $\mathbb{R}^m$:n nollavektori.)

Esim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Triviaali ratkaisu:

$$\mathbf{x} = \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homogeenisella systeemillä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on *aina* triviaaliratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siis se on aina konsistentti.

Onko **epätriviaaleja** ratkaisuja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 20 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konsistentti systeemi, jolla on vapaa muuttuja (x_2), siis (äärettömän paljon) ratkaisuja. Tässä tapauksessa ratkaisujoukko on $\vec{0}$:n kautta kulkeva suora: $x_1 + 10\,x_2 = 0$.

Yleisesti pätee: Homogeeniyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on epätriviaaleja ratkaisuja
jos ja vain jos systeemillä on **vapaita muuttujia**
Seurauksena tärkeä:

Lause [LinHom] Olkoon A ($m \times n$). Jos $n > m$ (enemmän sarakkeita kuin rivejä), niin homogeeniyhtälöllä $A\vec{x} = \vec{0}$ on epätriviaaleja ratkaisuja.

Tod: Homogeeninen on aina konsistentti, tukisarakkeiden lkm $\leq m < n$, joten ainakin yksi vapaa muuttuja, $\Rightarrow$ äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki: Selvitä, onko seuraavalla homogeenisella systeemillä epätriviaaleja ratkaisuja ja kuvaa ratkaisujoukko.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Ratkaisu:

Ilmann ainuttakaan rivioperaatiota tiedämme, että systeemillä on ainakin yksi vapaa muuttuja. (miksi?)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 0, \quad x_2 = t(\text{vapaa}), \quad x_3 = 0.$$

Siis

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kyseessä on $\vec{0}$:n kautta kulkeva, vektorin $\vec{v} = [-2, 1, 0]^T$ suuntainen suora $\mathbb{R}^3$:ssa.

Esim 2 A (3×1), tässä siis vain yksi yhtälö (eikä rivioperaatioita tarvita).

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

Vapaat muuttujat $x_2 = s, \quad x_3 = t$. Ratkaisu:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3s + 0.2t \\ x_2 = s + 0t \\ x_3 = 0s + tt \end{cases}$$

Vektorimuodossa:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3\,s + 0.2\,t \\ s + 0t \\ 0s + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3\,s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2\,t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisujoukko on $\mathbb{R}^3$:n taso T, jonka virittävät vektorit:

$$\vec{v}_1 = [0.3, 1, 0]^T, \quad \vec{v}_2 = [0.2, 0, 1]^T$$

Ts.

$$T = sp\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$