Lineaarialgebraa

1.1: Lineaarinen yhtälösysteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Esimerkkejä epälineaarisista:

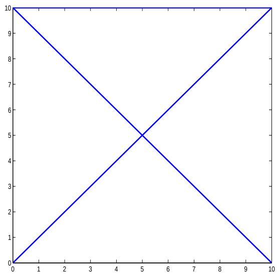
$$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2 \qquad \text{tai} \qquad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$$

Lineaarisen systeemin ratkaisu:

Lukujono (vektori) $(s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa yhtälösysteemin 1, kun sijoitetaan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

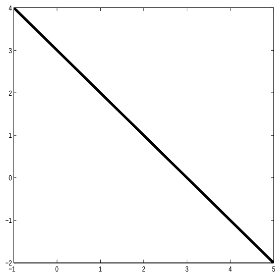
Tyyppiesimerkit 2×2 systeemeille

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 10 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}$$



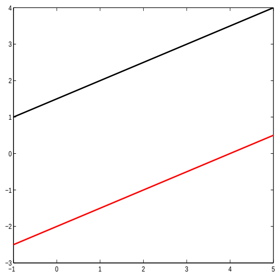
Yksi ratkaisu
konsistentti

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \end{array}$$



Äärettömän monta
konsistentti

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & 8 \end{array}$$

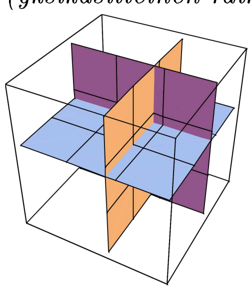


Ei ratkaisuja
epäkonsistentti

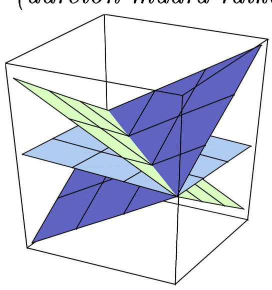
Perustotuus Yleisellä lineaarisella $m \times n$ systeemillä on vain nämä kolme mahdollisuutta. Tämän selvitämme perusteellisesti lähiaikoina.

ESIMERKKI: Kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta. Kukin yhtälö määrää tason 3−ulotteisessa avaruudessa.

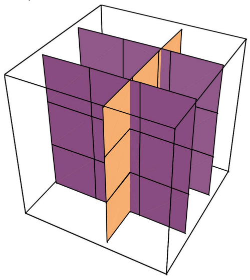
i) Tasot leikkaavat 1 pisteessä
(yksikäsitteinen ratkaisu)



ii) Tasot leikkaavat pitkin suoraa
(ääretön määrä ratkaisuja)



iii) Tasot yhtyvät   iv) Tasoilla ei yhteisiä pisteitä *(ei ratkaisuja)*



Tapaukset i), ii) ja iii) ovat *konsistentteja*, iv) on *epäkonsistentti.*

Tapauksissa ii) ja iii) ratkaisujoukot ovat äärettömiä edellisen "dimensio" on 1 ja jälkimmäisen 2.

$$\text{"}\, dim(ii) = 1, \quad dim(iii) = 2 \text{ "}$$

Lineaarisen yhtälösysteemin Ratkaisujoukko:

Kaikkien mahdollisten ratkaisujen muodostama joukko

Ekvivalentit systeemit:

Lineeriset yhtälösysteemit ovat **ekvivalentit**, jos niillä on samat ratkaisujoukot.

Yhtälösysteemin ratkaisustrategia:

Muokataan yhtälösysteemi ekvivalentiksi systeemiksi, joka on helppo ratkaista

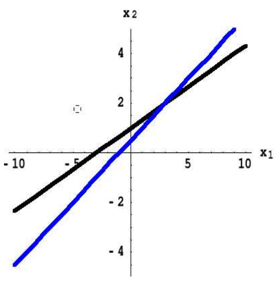
ESIMERKKI:

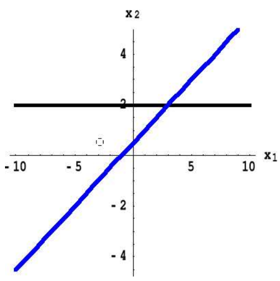
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad Y_2 \leftarrow Y_1 + Y_2$$

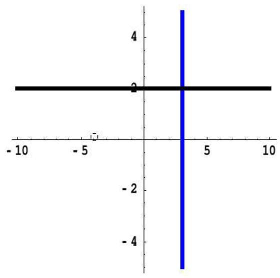
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad Y_1 \leftarrow Y_1 + 2\,Y_2$$

Viimeksi saatu yhtälö on muodossa, josta ratkaisut saadaan peräkkäisillä sijoituksilla alhaalta ylöspäin edeten (takaisinsijoitus, "back substitution"). Voidaan vaihtoehtoisesti suorittaa vielä yksi eliminaatioaskel alhaalta ylöspäin.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & 2 \end{array}$$







Matriisinotaatio

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(kerroinmatriisi)

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(liitännäismatriisi)

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 3 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Alkeisrivioperaatiot:
1. *(Rivien vaihto)* Vaihdetaan kaksi riviä keskenään : $\text{rivi}_i \leftrightarrow \text{rivi}_k$
2. *(Skaalaus)* Rivin alkiot kerrotaan nollasta poikkeavalla vakiolla:

$$\text{rivi}_k \leftarrow c\,\text{rivi}_k, \quad c \neq 0$$

3. *(Lineaarikombinaatio)* Riviin lisätään toinen rivi kerrottuna nollasta poikkeavalla vakiolla:

$$\text{rivi}_k \leftarrow \text{rivi}_k + c\,\text{rivi}_i$$

Huom! Operaatioissa 2 ja 3 ainoastaan yksi rivi (k:s) muuttuu, muut säilyvät ennallaan. (Operaatiossa 1 kaikki rivit säilyvät ennallaan, vain paikat vaihtuvat.)

Riviekvivalentit matriisit ja yhtälösysteemit: Matriisit A ja B ovat *riviekvivalentit*, jos ne voidaan muuntaa toisikseen alkeisrivioperaatioilla. Yhtälösysteemit ovat riviekvivalentit, jos niiden liitännäismatriisit ovat sitä.

Riviekvivalentit ovat ekvivalentit:

Lause Riviekvivalentit yhtälösysteemit ovat ekvivalentit, ts. niillä on samat ratkaisujoukot.

Todistus Rivien vaihto ja skaalaus kertoimella $c \neq 0$ säilyttävät ratkaisut.

$$\begin{cases} L_1\vec{x} = b_1 \\ L_2\vec{x} = b_2 \\ \dots \\ L_m\vec{x} = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_1\vec{x} = b_1 \\ c\,L_1\vec{x} + L_2\vec{x} = c\,b_1 + b_2 \\ \dots \\ L_m\vec{x} = b_m \end{cases}$$

Vasen $\implies$ oikea: Kertomalla c:llä ja laskemalla yhteen yhtälöt 1 ja 2.
Oikea $\implies$ vasen: Kertomalla eka c :llä ja vähentämällä toisesta.

ESIMERKKI:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ & - & 3x_2 & + & 13x_3 & = & -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ & - & 3x_2 & + & 13x_3 & = & -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Takaisinsijoitus
Edetään alhaalta ylös:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 4x_3 + 4 = 16 \\ x_1 = 2\,x_2 - x_3 = 32 - 3 = 29 \end{cases}$$

Ratkaisu on siis $(29, 16, 3)$ ja se on yksikäsitteinen. (Miksi?)

Takaisinsijoituksen sijasta voitaisiin viimeksi saadusta porrasmuodosta jatkaa eliminointia alhaalta ylös ja oikealta vasemmalle, päämääränä nollata myös jokaisen tukisarakkeen yläosa. Jatko menisi tähän tapaan:

Porrasmuodosta redusoituun porrasmuotoon, ref → rref

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & = & -3 \\ & & x_2 & & & = & 16 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 29 \\ & & x_2 & & & = & 16 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Peruskysymykset – olemassaolo ja yksikäsitteisyys

1) Onko systeemi konsistentti, ts. onko ratkaisuja?
2) Konsistentin systeemin ratkaisujen lukumäärä? Milloin yksikäsitteinen ratkaisu?

ESIMERKKI: Onko systeemi konsistentti?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}$$

Tälle laskettiin edellä porrasmuoto (yläkolmiomuoto) (ref):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tästä näkyy, että systeemi on konsistentti ja ratkaisu on yksikäsitteinen. EIKÖ VAIN!

ESIMERKKI: Miten on tämän systeemin ratkaisujen laita?

$$\begin{array}{r} 3x_2 - \ 6x_3 = \ \ 8 \\ x_1 - 2x_2 + \ 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = \ \ 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Solution: Rivioperaatioilla:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Palataan havainnollisuuden vuoksi yhtälömuotoon:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 8 \\ & & & & 0x_3 & = & -3 \quad \leftarrow \textit{Ei toteudu sitten millään } x_3\textit{:lla} \end{array}$$

Annettu systeemi on epäkonsistentti (ts. ei ratkaisuja).

ESIMERKKI: Millä h :n arvoilla seuraava systeemi on konsistentti?

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & - & 9x_2 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & = & h \end{array}$$

Ratkaisu: Porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 4 \\ -2 & 6 & h \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ -2 & 6 & h \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & h+\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Toinen yhtälö; $0x_1 + 0x_2 = h + \frac{8}{3}$. Tämä toteutuu vain, jos $h + \frac{8}{3} = 0$ eli $h = \frac{-8}{3}$.
Ensimmäinen yhtälö on $x_1 - 3\,x_2 = \frac{4}{3}$. Ratkaisuja ääretön määrä.
Johtopäätös: Systeemi on konsistentti jos ja vain jos $h = \frac{-8}{3}$.
Tällöin ∞ määrä ratkaisuja.