OSITTAISDIFF. YHTÄLÖT

KRE Ch 11

yhtälö (systeemi?), jossa tuntematon funktio u on kahden tai useamman muuttujan fkt.

$u(x,y)$, $u(x,y,z)$, $u(x,t)$, ...

$u(x,y,z,t)$, ...

yhtälössä esiintyy osittaisderivaattoja.

Esim 1) Cauchy-Riemann yhtälösyst
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Ratkaisut: Kaikkien analyyttisten funktioiden Re- ja Im-osat u ja v.

2) Laplacen yhtälö $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Ratkaisut: Kaikki harmoniset funktiot

"Lineaarinen" ja "homogeeninen" vastaavasti kuin ennen:

1. asteen polynomi u:n ja sen derivaattojen suhteen.

Esim: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ on lin. ja homog.
Laplace

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ lin. ja EH.
Poisson

{ Reuna – arvotehtävä
{ Alkuarvotehtävä

Esim

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 1-ul. aaltoyhtälö

(2) $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 1-ul. lämpöyht (diffuusioyht.)

(3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 2-ul. Laplacen yhtälö

(4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ 2-ul Poissonin yhtälö

(5) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$ 1-, 2-, tai 3-ul. aaltoyht.

(6) $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u$ —"— lämpöyht.

(7) $\Delta u = f$ —"— Poissonin yhtälö

$$\left(\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right)$$

Ratkaisujen joukko hyvin laaja.

Esim: (3):n ratkaisuja:

$u = x^2 - y^2$, $u = e^x \cos y$, $u = \ln(x^2+y^2)$,

yl: kaikki harmoniset fkt.

Yleisen ratkaisun käsite ei ole mielekäs, liikaa, liikaa.

(AE + RE) Ratkaisut riippuvat alueen geometriasta

Lause 1 Jos u_1 ja u_2 ovat lin. homog. yhtälön ratkaisuja, niin myös

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

on ratkaisu.

Tod: Kysymys on derivaattaoperaation lineaarisuudesta.

Esim. lämpöyhtälö: $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u$

Olk. u_1 ja u_2 ratkaisuja, $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial t}}_{c^2 \Delta u_1} + c_2 \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial t}}_{c^2 \Delta u_2} = c_1 c^2 \Delta u_1 + c_2 c^2 \Delta u_2$$

$$= c^2 \Delta (c_1 u_1 + c_2 u_2) = c^2 \Delta u \qquad \square$$

(Δ lin.)