Luennon ti 14.11. kalvoja + ominaisarvopruju

1. Kanta, dimensio

Lay 2.9, 4.5, 4.6
`http://math.tkk.fi/opetus/k3/03/L/LA2.html#Kanta ja dimensio`
KRE 7.5. s. 354

Ajattelemme $\mathbb{R}^n$:n aliavaruutta H. Aivan samat päättelyt pätevät yleisemminkin mielivaltaisessa ("äärellisulotteisessa") vektoriavaruudessa.

- **Kanta** Vektorijoukko, joka virittää ja on LRT.
- **LA2/Lause 1** Esitys kannan avulla on yksikäsitteinen.
- **LA2/Lause 2** Avaruuden H jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.
- **LA2/Määritelmä (dimensio)** Kannan (minkä tahansa) vektorien lukumäärä.

Kannaksi laajentaminen ja karsiminen

- **LA2/Lemma 1 (LRT-lemma)** Jos vektorijoukko $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\} \subset H$ on LRT ja jokin $\boldsymbol{v} \in H$ ei ole näiden lineaarikombinaatio, niin joukko $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}\}$ on LRT.
  (Vrt. Lay 4.3 Theorem 5 (The spanning set theorem)
- **LA2/Lause (kannaksi laajentaminen)** Aliavaruuden $H \subset \mathbb{R}^n$ LRT joukko voidaan laajentaa H:n kannaksi.
  Tod: Käytetään (toistuvasti) LRT-lemmaa. $\square$
- **LA2/Lause (kannaksi karsiminen)** Aliavaruuden $H \subset \mathbb{R}^n$ virittävä joukko voidaan karsia H:n kannaksi.
  Tod: Käytetään (toistuvasti) LRT-lemmaa. $\square$
- **Lay 4.5 s. 259/The basis theorem (kantalause)**
  Olkoon H $p-$dimensioinen (ali)avaruus.
  1. Jokainen p:n vektorin LRT joukko on H:n kanta.
  2. Jokainen p:n vektorin virittävä joukko on H:n kanta.

  Tod: 1. Olkoon $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ LRT. Jos se ei virittäisi, voitaisiin se laajentaa H:n kannaksi. Ristiriita lauseen 2 kanssa.
  2. Virittäköön $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ H:n. Jos se ei olisi LRT, se voitaisiin karsia kannaksi, jälleen ristiriita lauseen 2 kanssa.
  (Molemmissa päättelyissä pärjätään LRT-lemmalla, yksi askel riittää.) $\square$

Rangi, nulliteetti, peruslause

Perjantain (10.11.) luennolla ratkaistiin eräs $A\boldsymbol{x} = \{0\}$ ja muodostettiin nolla-avaruuden $\mathrm{N}(A)$ kanta. Kertaukseksi vaikka LA3:n alku ("Nolla-avaruus").

Nähtiin, että $N(A)$:n kantavektoreita on yhtä monta kuin vapaita muuttujia.

Avaruus	Dimensio
Nolla-avaruus N(A)	nulliteetti, $n(A)$
Sarakeavaruus col(A)	rangi, $r(A)$
Riviavaruus row(A)	rangi, $r(A)$

Sarakeavaruus ja sen dimensio

Viimeksi (pe) laskettiin ja todettiin:
1. Rivioperaatioissa sarakkeiden LRT/LRV-käytös säilyy.
2. Tukisarakkeet ovat LRT.
3. Ei-tukisarake voidaan lausua tukisarakkeiden lineaarikombinaationa.

1. Lausutaan LRT/LRV-vektoriyhtälö rivimuodossa $A\,\boldsymbol{c} = \{0\}$. Ratkaisut säilyvät samoina rivioperaatioissa, ja sitten vaan takaisin vektorimuotoon.
2. Irrotetaan tukisarakkeet omaksi matrisikseen. Silloin kaikki sarakkeet ovat tukisarakkeita ja siis (HY):n ratkaisu on yksikäsitteinen. (Tai päätellään ihan suoraan "takaisinsijoittamalla".)
3. Irrotetaan matriisista tukisarakkeet kerroinmatriisiksi ja sijoitetaan haluttu mielivaltaisesti valittu ei-tukisarake yhtälösysteemin oikeaksi puoleksi. No, systeemihän on konsistentti, kun viimeinen sarake ei ole tukisarake, joten ko. ei-tukisarake on tukisarakkeiden lineaarikombinaatio.

Riviavaruus

Lause Jos A ja B ovat riviekvivalentit, niin row(A) = row(B).

Tod: Koska B :n rivit ovat A :n rivien lineaarikombinaatioita, niin B :n rivivektorit kuuluvat viritelmään row(A), joten myös row$(B) \subset$ row(A). Mutta aivan yhtä hyvin kääntäen. $\square$

Lause Riviavaruuden kannan muodostavat ref(A):n nollasta poikkeavat (siis tuki-)rivit. Siten todellakin rivi- ja sarakeavaruuksilla on sama dimensio.

Tod: Tukirivit ovat LRT aivan samalla päättelyllä kuin tukisarakkeet. (Tukirivit ovat transpoosin tukisarakkeita.) Tukirivit ovat siis sekä LRT että virittävät (edellisen perusteella), ja muodostavat siten row(A):n kannan.

Huom! Rivioperaatioissa rivivektoreille säilyy viritys, muttei LRT. Rivioperaatioissa sarakevektoreille säilyy LRT, muttei viritys.

Yhteenveto laskentaan:

N(A): Ratkaistaan $A\,\boldsymbol{x} = \{0\}$, kantavekt.: Yksi kutakin vap. muutt. kohti
col(A): Kanta: Tukisarakkeet poimitaan **alkuperäisestä** matriisista
(ref-muodon vastaavat eivät yleensä viritä).
row(A): Kanta: ref-muodon ei-nollarivit.
(Alkuperäisen vastaavat eivät välttämättä LRT.)

Edellisen perusteella meille putoaa:

Lause[Rangilause] (KRE s. 333 Thm 1) Matriisin A rangi $r(A)$ (joka määritellään sarakeavaruuden dimensioksi) = riviavaruuden dimensio. Toisin sanoen matriisin rangi on

$$\text{maksimi määrä LRT sarakkeita} = \text{maks määrä LRT rivejä.}$$

Erityisesti neliömatriisilla pätee: Rivit LRT $\Longleftrightarrow$ sarakkeet LRT.
(Tätä olen usein kutsunut ”lineaarialgebran ihmeeksi”.) □

Lause[Lineaarialgebran peruslause]
Olkoon A $(m \times n)$-matriisi.

$$n(A) + r(A) = n.$$

Tod: Tämäkin on jo perusteltu. Kerran vielä; sarakkeita on kahdenlaisia: tukisarakkeita ja ei-tuki- eli vapaiden muuttujien sarakkeita. □

Neliömatrisiit: Determinantit ja käänteismatriisi

A olkoon $(n \times n)$ *neliömatriisi*

Determinantit, kts. `http://math.tkk.fi/opetus/k3/04/L/DetInv.pdf`

Determinantin kehittämislaskelma, $25 \times 25-$matriisi. Kertolaskuja $\sim 25!$.
Gaussilla $\sim 25^3$

```
octave:23> oper=factorial(25)
oper =  1.5511e+25
octave:22> tera=10^12;
octave:25> sek=oper/tera
sek =  1.5511e+13
octave:27> vuosia=sek/3600/24/365
vuosia =  4.9186e+05    % n. 500 000 vuotta
octave:28> gauss=25^3
gauss = 15625
octave:29> gauss/tera
ans =  1.5625e-08      % Gaussilla hujahtaa 1/(100 000 000) sekunnissa.
```

Algoritmillä on väliä!

Käänteismatriisi

Määr: $A(n \times n)$ on kääntyvä, (ei-singulaarinen, säännöllinen), jos on olemassa $B(n \times n$ siten että

$$A\,B = B\,A = I,$$

missä I on $\boldsymbol{n} \times n-$yksikkömatriisi. Merk $B = A^{-1}$.

Huom: Jos $\exists A^{-1}$, niin se on yksikäsitteinen: Olkoot B ja C kaksi käänteismatriisia.

$$B = I\,B = (C\,A)B = C(A\,B) = C\,I = C$$

. $\square$

Lause 1[Kääntyvyys ja rangi]

$$A \;\text{ on kääntyvä } \iff r(A) = n$$

Tod: 1. Oletetaan kääntyvyys. Tarkastellaan (HY):ä $A\,\boldsymbol{x} = \{0\}$. Kerrotaan puolittain A^{-1} :llä, ja saadaan: $x = A^{-1}\{0\} = \{0\}$. Siis (HY):llä vain triv. ratk (ja ratk. siis yksikäs), joten jokainen sarake on tukisarake.

2. Oletetaan: $r(A) = n$. Tällöin yhtälöllä $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. (Matriisin sarakkeet muodostavat $\mathbb{R}^n$:n kannan.)

Valitaan $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_j, \quad j = 1, \ldots, n$.

Ratkaisuvektorit $\boldsymbol{x}_j$ ladotaan sarakkeiksi: $X = [\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_n]$.

Tällöin $A\,X = I$.
Onko myös $X\,A = I$?

Yksityiskohdat luennolla. $\square$

Huom! Edellisestä todistuksesta seuraa: Toinen ehdoista $A\,B = I$ tai $B\,A = I$ riittää käänteismatriisille.

Lause 2 [Kääntyvyys ja determinantti]

$$A \;\text{ on kääntyvä } \iff \det(A) \neq 0.$$

Tod: Rivioperaatiot eivät muuta rangia eivätkä determinantin $0-$käytöstä.
$r(A) = n \iff$ ref(A):n kaikki sarakkeet tukisarakkeita $\iff$ ref(A):n kaikki diagonaalialkiot $\neq 0 \iff \det(A) \neq 0$.

$\det(A) = C\,d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n, \quad C \neq 0.$

Lause 3[Tulo ja transpoosi]

1. Jos A on kääntyvä, niin myös A^{-1} on kääntyvä ja
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$
2. Jos A ja B kääntyviä, niin $A\,B$ kääntyvä ja $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Jos A on kääntyvä, niin myös A^T on kääntyvä ja $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Tod. Kerrotaan vaikka oikealta ko. ”kandidaatilla”

Nyt voidaan koota sopiva versio ”käänteismatriisilauseeksi”.

Käänteismatriisilause (Layssa monta versiota eri paikoissa)
Seuraavat ovat yhtäpitävät ($A(n \times n)$):
1. A on kääntyvä
2. $r(A) = n$
3. $\det(A) \neq 0$
4. $N(A) = \{0\}$ ($n(A) = 0$)
5. A:n sarakkeet ovat LRT ($\iff$) virittävät $\mathbb{R}^n : n$
6. A:n rivit ovat LRT ($\iff$) virittävät $\mathbb{R}^n : n$
7. (HY):llä $A\,\boldsymbol{x} = \{0\}$ vain triviaaliratk. $\boldsymbol{x} = \{0\}$
8. (EHY):llä $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on ratkaisu $\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

Käänteismatriisikaavat ja laskenta

Determinanttien avulla voidaan esittää kaunis ratkaisukaava käänteismatriisille ja yhtälösysteemille. Pienillä n ($n = 2, \quad n = 3$) voivat olla käteviä. Suuremmilla hyödyttömiä. (Ellei ole aikaa odotella 500000 vuotta.)

Tarvitaanko käänteismatriisin laskemista?
Yleensä ei! Käänteismatriisi on teoreettisena välineenä hyödyllinen matriisilausekkeissa. Käytännössä sitä voitaisiin soveltaa yhtälösysteemin ratkaisukaavana $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Mutta tämä on tehotonta ja numeerisesti epätarkempaa kuin suora ratkaisu.
Entä, jos oikeita puolia on paljon? No ei silloinkaan, vaan esim. LU-hajotelma.

Kurssimateriaalia KP3-II-kursille syksyllä 2006.
14. marraskuuta 2006
Heikki Apiola

Kirjallisuutta,www-sivuja

[Lay] Lay . *Linear Algebra*, 3^{rd} ed.,Addison Wesley ,2003.

[KRE] Kreyszig . *Advanced Engineering Mathematics*, 8^{th} ed.,Wiley ,1999.

[TE] Timo Eirola . *Lineaarialgebra*, L3-kurssimoniste

`KP3-kurssien www-sivuja`

[wwwhome] `http://math.tkk.fi/teaching/kp3-ii/` (Kurssin pääsivu)
`http://math.tkk.fi/teaching/kp3-ii/06/L/ominaisarvot.pdf` (Tämä pruju)

[wwwmaple] `http://math.tkk.fi/teaching/k3/05/L/ominaisarvot.html` (Maple-ws:n html-versio: Ominaisarvojen havainnollistusta ja laskentaa, “pyörivät siniset ja punaiset nuolet”)

1 Ominaisarvot ja -vektorit

Tarkasteltavana oleva matriisi on koko ajan **neliömatriisi**, $A(n \times n)$.

Johdanto

Ajatellaan neliömatriisia A ennen kaikkea sen määräämän lineaarikuvauksen kannalta.

Tähän asti staattisia ongelmia: lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu.
Nyt käsittelemme dynaamisia tehtäviä. Tyypillisesti tarkastelemme iteraatiota

$$\text{Alkupiste } \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x_{k+1}} = A\boldsymbol{x_k}, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tällöin joudumme laskemaan matriisin potensseja (joita neliömatriisille voidaan laskea). Sovellutuksina näemme mm. diskreettejä dynaamisia systeemejä (differenssiyhtälösysteemejä) ja differentiaaliyhtälösysteemejä.

Ominaisarvotehtäviä tulee luonnontieteellissä sovelluksissa vastaan hyvin monessa paikassa. Kyseessä on myös insinöörimatematiikan kaikkein tärkeimpään ydinalueeseen kuuluva aihepiiri. Lisäksi: kaunis kappale lineaarialgebraa.

1.1 Määritelmä ja laskutekniikkaa

(A on $(n \times n)$ neliömatriisi.)

Tarkastellaan yhtälöä

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \lambda \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

Yhtälöllä on aina triviaaliratkaisu $\boldsymbol{x}$=$\mathbf{0}$, olipa λ mikä tahansa kompleksiluku.

Tehtävä:

(a) Määritä luku λ siten, että yhtälöllä (1.2) on ei-triviaaleja ratkaisuvektoreita $\boldsymbol{x}$.
(b) Määritä sitten kutakin ratkaisua λ kohti ao. ratkaisuvektorit $\boldsymbol{x}$.

Määritelmä 1.1 *Lukua λ sanotaan matriisin A* **ominaisarvoksi** *ja vektoria $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ vastaavaksi* **ominaisvektoriksi**, *jos*

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Englanninkiellä: "Eigenvalue, eigenvector"

Havainnollistusta

Geometrisesti ominaisvektori tarkoittaa suuntaa, joka säilyy samana (tai vastakkaisena) sovellettaessa lineaarikuvausta A. Ominaisarvo kuvaa venytys/kutistussuhdetta, negatiivisessa tapauksessa lisäksi suunnan vaihtoa.

Viitteesessä `[wwwmaple]` on useita esimerkkejä lineaarikuvauksista $\mathbb{R}^2$: ssa. Yksikköympyrän kehää kiertävä sininen lähtönuoli kuvataan matriisilla kertomalla punaiseksi kuvanuoleksi. Animaatiota askel kerrallaan ajettaessa näkyy kohdat, joissa sininen ja punainen nuoli menevät päällekkäin. Siinä on ominaisvektori, ominaisarvo antaa venytys-/kutistuskertoimen, jolla sininen saadaan punaiseksi. (Animaatioita voi ajaa askel kerrallaan Maplessa, lataamalla `ominaisarvot.mws` Mapleen. Tällöin on mahdollisuus tehdä omia kokeiluja muillakin matriiseilla yms. Ilman Maplea voi katsella valmista esitystä pelkästään selaimella `ominaisarvot.html`.)

Tämä kuvailu pätee reaalisiin ominaisarvoihin (ja -vektoreihin) nähden. Kompleksisessa tapauksessa tilanne voi olla "epäintuitiivisempi", kannattaa muistaa, että esim. i:llä kertominen merkitsee kiertoa tasossa kulman $\pi/2$ verran, joten skalaarilla kertominen ei tarkoita (reaalisella) suoralla pysyttelemistä.

Tehtävän muokkaus ratkaistavaan muotoon

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \lambda \in \mathbb{C} \iff (A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{1.2}$$

Kyseessä on siis homogeeniyhtälö, jonka kerroinmatriisi sisältää parametrin λ. Se pitää valita siten,
että HY:llä on ei-triv. ratkaisuja, ts. Gaussin eliminaation on tuotettava ainakin 1 nollarivi, joten on oltava $\det(A - \lambda I) = 0$.

Esimerkki 1.1 *Lasketaan aluksi wwwmaple-työarkin ensimmäinen esimerkkitapaus:*
$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda + 3 & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2.$
Tästä saadaan nollakohdat, eli **ominasiarvot***:* $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$

Ominaisvektorit:
$\lambda_1 = 1$

$A - I = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, *mistä saadaan $x_1 = x_2$, joten ominaisvektori on $[1,1]^T$. (Tämä vektori on ominaisavaruuden kanta, toki voidaan kertoa millä tahansa skalaarilla $c \neq 0$.)*

$\lambda_2 = 2$

$A - 2\,I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. *Valitaan* $x_2 = 1$, *jolloin* $x_1 = 2$. *Saadaan siis* $x_2 = [2, 1]^T$.

Muista *verrata laskun tuloksia www-työarkkiin, tai vielä mieluummin piirrä paperille.*

Huomioita:

Jos A on $2 \times 2-$matriisi, voidaan ominaisvektoreita laskettaessa aina jättää toinen yhtälö pois, sillä matriisin rivien on oltava `LRV`.

Kyseessä on nolla-avaruuden määräämistehtävä. Tässä tapauksessa oli **kaksi erisuurta ominaisrvoa**. Tällöin $2\times 2-$matriisin tilanteessa saadaan aina kumpaankin ominaisarvoon liittyen yksiulotteinen ominaisavaruus.

Esimerkki 1.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ominaisarvot:

Muodostetaan $D(\lambda) = det(A - \lambda\, I) = -(\lambda + 2)(\lambda - 6)^2$. *Tämä saadaan kehittämällä 1. sarakkeen suhteen. Helpon tekijöihin jaon toivossa kannattaa säilyttää laskut tekijämuodossa, kiirehtimättä kertomaan auki, ennenkuin on pakko. Tässä tehtävässä pakkoa ei tule, vaan saadaan hyvin lyhyellä laskulla tuo tulos. (Yksityiskohdat kannattaa lukijan laskea itse.)*

Koska tekijä $(\lambda{+}2)$ *esiintyy potenssissa* 1, *sanotaan, että ominaisarvon* $\lambda_1 = -2$ **algebrallinen kertaluku** $M_{\lambda_1} = 1$. *Vastaavasti* $(\lambda - 6)$ *esiintyy potenssissa* 2, *joten ominaisarvon* λ_2 **algebrallisen kertaluvun** M_{λ_2} *sanotaan olevan* 2.

Lasketaan ominaisvektorit

Sijoitetaan karakteristiseen matriisiin $K_\lambda = A - \lambda I$ λ*:n paikalle vuorollaan kukin ominaisarvo.*

Ominaisarvoon $\lambda_1 = -2$ **liittyvät ominaisvektorit**

$K_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Tässä ei rivioperaatioita tarvita. Alin rivi voidaan jättää pois (identtinen ylimmän kanssa). Voidaan haluttaessa jakaa 1. rivi 4:llä ja toinen 8:lla, muttei sekään ole tarpeen.

2. rivi $\Longrightarrow$ x_3 *vapaa ja* $x_2 = 0$.
1. rivi $\Longrightarrow$ $x_1 = -x_3$.

Jos valitaan: $x_3 = 1$, *saadaan* $\boldsymbol{v}_1 = [-1, 0, 1]^T$.

Saadaan 1-ulotteinen ominaisavaruus. Ominaisavaruuden λ *dimensiolle käytetään merkintää* m_λ *ja nimitystä* **geometrinen kertaluku**. *Tässä tapauksessa algebrallinen ja geometrinen kertaluku yhtyvät* $m_{\lambda_1} = M_{\lambda_1} = 1$.

Yleisesti voitaisiin muodostaa ref (tai rref).

$ref(K_{\lambda_1}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *Tästä nähdään heti, että nolla-avaruuden dimensio* $= 1$. *(n-tukisarakkeiden lkm = nollarvien lkm, kun kerran on neliömatriisi.) Tässä tapauksessa laskut eivät edellisestä yksinkertaistu, koska matriisi oli jo heti yhtä rivioperaatiota ja normeerausta vaille jopa rref-muodossa.*

Ominaisarvoon $\lambda_2 = 6$ liittyvät ominaisvektorit

$$K_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Nyt jää vain yksi yhtälö, jossa voidaan kaksi muuttujaa valita vapaasti, vaikkapa x_3 ja x_2, ja ratkaisemalla $x_1 = x_3$.

Saadaan kaksi LRT ominaisvektoria valitsemalla ensin $x_3 = 1, x_2 = 0$ ja sitten päinvastoin $x_3 = 0, x_2 = 1$

$\boldsymbol{u}_1 = [1, 0, 1]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [0, 1, 0]^T$. *Kertaluvut ovat taas samat: $m_{\lambda_2} = M_{\lambda_2} = 2$.*

Siis ominaisavaruudet ovat: $E_{-2} = sp\{[-1, 0, 1]\}$ ja $E_6 = sp\{[1, 0, 1], [0, 1, 0]\}$

(Yhtälösysteemien yhteydessä opitun systematiikan mukaan toimien saataisiin lisäämällä 1. rivi kolmanteen ja jakamalla vielä -4 : llä, matriisi, jonka ensimmäinen rivi olisi $1, 0, -1$ ja muut nollarivejä. Siis $r = 1$, $n - r = 3 - 1 = 2$, joten nolla-avaruuden dimensio $= 2$.)

Jäljempänä esitettävän lauseen mukaan eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat LRT, joten voimme sen turvin suoraan päätellä, että laskemamme 3 ominaisvektoria ovat LRT ja siis $\mathbb{R}^3$:n kanta. Ilman tuota lausetta täytyisi turvautua ref:iin.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kaikki sarakkeet ovat tukisarakkeita, joten sarakkeiksi latomamme ominaisvektorit ovat todellakin `LRT`.

Huomautus 1.1 **Varo** *harhaluulemasta, että lineaarinen riippumattomuus voitaisiin todistaa osissa niin, että osoitettaisiin vaikka kaksi vektoria LRT:ksi ja kolmas kummastakin LRT:ksi. Tokihan kolmas voi sijaita kahden virittämässä tasossa (ja muodostaa siis ensinmainittujen kanssa LRV joukon) ja olla kummankin kanssa eri suuntainen.*
Edellä mainitussa (jäljempänä esitettävässä) lauseessa esiintyvässä "ominaisvektoriniputuksessa"on kyse siitä, että kaikki mahdolliset valinnat eri ominaisavaruuksista antavat LRT vektorijoukon. Mutta, kuten sanottu, palataan.

1.2 Karakteristinen polynomi, ominaisarvon kertaluvut

|

Jos determinantti $D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ kehitetään vaikkapa 1. sarakkeen mukaan, nähdään, että se on polynomi, joka on muotoa:

$$D(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} \ldots + c_0.$$

Polynomi, jota sanotaan *karakteristiseksi polynomiksi*, on siis aina astetta n. Kertoimet c_0 ja c_{n-1} on helppo määrittää. Edellinen saadaan laskemalla

$$c_0 = p(0) = \det(A - 0\,I) = \det(A).$$

Jälkimmäinen saadaan kertomalla diagonaalitermit $(\lambda - a_{i,i})$ ja ottamalla mukaan ... Näin saadaan $c_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})$.

Algebran peruslause sanoo, että **jokaisella polynomilla, joka ei ole vakio, on kompleksitasossa nollakohta**. Lauseen todistus vaatii vähän enemmän kompleksianalyysin työkaluja, kuin olemme tällä kurssilla käsitelleet. Sitä voidaan pitää kurssin kannalta "syvällisenä" ja toki muutenkin. Hieno tulos, jonka elegantti toditus pohjautuu ns. *Liouville'n* lauseeseen: Jokainen koko kompleksitasossa analyyttinen (kokonainen) funktio, joka on rajoitettu, on vakio. (Sovella tätä $1/p(z)-$ funktioon, jossa $p(z)$ on polynomi, jolla ei ole kompleksitasossa yhtään nollakohtaa $\ldots$. Ristiriita on käden ulottuvilla.)

Lisäksi on käytössämme kaikkea muuta kuin syvällinen asia: **Jos polynomilla** $p(z)$ **on nollakohta** z_0**, niin se on jaollinen** $(z - z_0)$ **:lla.** Tämähän seuraa heti kirjoittamalla $p(z) - p(z_0)$ ja toteamalla, että koska vakiotermit kumoutuvat, saadaan jokaisesta termistä $z - z_0$ tekijäksi.

Saadaan siten:

Lause 1.1 (KRE8 Thm. 1 s. 373) *Neliömatriisilla A $(n \times n)$ on ainakin yksi ja korkeintaan n erillistä ominaisarvoa. Ne voivat olla kompleksisia, vaikka matriisi olisi reaalinen.*

Karakteristinen polynomi voidaan kirjoittaa muotoon:

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{k_n}$$

Ominaisarvon λ_k **algebrallinen kertaluku** M_λ tarkoittaa kyseisen polynomin nollakohdan kertalukua. Siten M_{λ_k} ilmaisee siis potenssin p_k, jossa tekijä $(\lambda - \lambda_k)$ esiintyy.

Voidaan sanoa, että $n \times n$-matriisilla on n kappaletta ominaisarvoja, kun kukin otetaan niin monta kertaa kuin sen algebrallinen kertaluku ilmaisee.

Määritelmä 1.2 *Ominaisarvoon λ liittyvä* ***ominaisavaruus*** *E_λ koostuu kaikista λ:aan liittyvistä ominaisvektoreista ja nollavektorista. E_λ on vektorialiavaruus, koska se on $(A - \lambda I)$:n nolla-avaruus.*
Ominaisarvon **geometrinen kertaluku** *m_λ on ominaisavaruuden E_λ dimensio. Siis $m_\lambda = dim(E_\lambda)$.*

Ominaisarvojen ja -vektorien laskeminen, yhteenveto

Kootaan vielä kertaukseksi toimintaohje:

1. Muodostetaan karakteristinen polynomi

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

ja ratkaistaan sen nollakohdat, näin saadaan ominaisarvot.

2. Ratkaistaan homogeeniyhtälö

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0,$$

ts. määrätään nolla-avaruus $N(A - \lambda I)$ kullakin ominaisarvolla λ.

Ratkaisussa on ainakin yksi vapaa parametri, sanokaamme t, joka voidaan valita mielivaltaisesti (esim. t=1). Jos vapaita parametrejä on useita, täytyy pitää huoli siitä, että saadaan lineaarisesti riippumattomat ratkaisuvektorit. Varma valinta esim. tapauksessa ”3 vapaata parametria”on:

$$\begin{array}{c} \text{Yksi ominaisvektori : parametrit: } 1,0,0 \\ \text{Toinen ominaisvektori : parametrit: } 0,1,0 \\ \text{Kolmas ominaisvektori : parametrit: } 0,0,1. \end{array}$$

Jos kysytään vain ominaisavaruuden E_λ dimensiota, eli ominaisarvon λ geometrista kertalukua, riittää määrittää matriisin $A - \lambda I$ rangi r, ts. tukisarakkeiden lukumäärä. Kysytty dimensio on silloin $n - r$.

Kertaukseksi
1. Ominaisarvot ovat 1-käs, ominaisvektorit eivät.
2. Kuhunkin ominaisarvoon liittyy ominaisavaruus, päämääränä on löytää jokin kanta ominaisavaruudelle.

Käytännön (numeerisista) laskentamenetelmistä

Polynomiyhtälön ratkaisussa on useimmiten turvauduttava numeerisiin menetelmiin. Matlabissa on tähän tarkoitukseen funktio `roots`. Oikeissa numeerisissa menetelmissä lasketaan ensin ominaisvektorit (tai esim. muutama dominoiva ominaisvektori – sellaiset, jotka vastaavat muutamaa suurinta ominaisarvoa). Ominaisarvot lasketaan vasta sitten.

Itse asiassa Matlabin `roots`-komennon käyttö ominaisarvotehtävissä on lievää ”itsepetosta”. Se perustuu algoritmiin, joka laskee annettuun polynomiin liittyvän matriisin, ns. “companion matrix”:n ominaisvektorit ja sitten ominaisarvot. Sivutuotteena, eräänlaisena kuriositeettina, siitä saadaan helposti kohtuullinen polynomiyhtälön ratkaisija.

Ominaisarvojen laskenta tätä kautta on siten hyödyllistä pelkästään perusasioiden opetteluun. Oikeaan laskentaan käytetään komentoa `eig`.

Matlabin “isä” *Cleve Moler*, joka on eräs nykyaikaisen tieteellisen laskennan huomattavia vaikuttajapersoonallisuuksia, pitänee polynomiyhtälön ratkaisemista nykyaikana hieman numeerisen analyysin sivuraiteille kuuluvaksi. Siitä syystä hän ei luultavasti ole kiiruhtanut ottamaan Matlabiin parasta alan algoritmia käyttöön. Myös Matlabin historia on hyvin vahvasti juuri lineaarialgebrassa. Sillä alueella on erityisesti panostettu parhaisiin algoritmeihin, toki sitten myös mm. differentiaaliyhtälöissä.

1.3 Illuusiot romahtavat – esimerkkejä, defektiivisyys

|

Toinen illuusiomme voisi olla se, että jokaisella reaalisella matriisilla olisi reaalinen ominaisarvo. Koska kyseessä on polynomiyhtälön nollakohta, tuo on varsin epärealistinen toive. Myös kiertomatriisin ajattelu antaa saman johtopäätöksen. Lasketaan joka tapauksessa esimerkki.

Vakavampi illuusio voisi olla se, että algebrallinen ja geometrinen kertaluku olisivat aina samat. Sitähän tukevat tähän mennessä esiintyneet esimerkit. Romutamme tämän illuusion heti esimerkillä ja kerromme, mitä tiedetään yleisesti kertalukujen suhtautumisesta toisiinsa.

Esimerkki 1.3 *Olkoon* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Lineaarikuvauksena tarkasteltuna* $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Siis kaikki x_1-akselilla makaavat vektorit kuvautuvat 0-vektoriksi, joten ne ovat ($\mathbf{0}$:aa lukuunottamatta) ominaisarvoon $\lambda = 0$ liittyviä ominaisvektoreita. Muut kuin x_1- akselin suuntaiset vektorit kuvautuvat myös x_1-akselille, joten ne eivät ole ominaisvektoreita. Näyttää siis siltä, että kaikenkaikkiaan matriisilla on vain yksi ominaisvektori (tarkemmin sanottuna yksi yksiulotteinen ominaisavaruus).

No mutta lasketaan toki myös.

$D(\lambda) = \lambda^2$, *joten $\lambda = 0$ on (algebrallisesti) kaksinkertainen ominaisarvo, eli $M_0 = 2$.*
Ominaisarvoon $\lambda = 0$ liittyvä ominaisavaruus on sama kuin A:n nolla-avaruus. Koska A:lla on yksi tukisarake, tämän dimensio on $2 - 1 = 1$. Ominaisvektorit määräytyvät yhtälöstä

$0\,x_1 + x_2 = 0$, *eli x_1 mielivaltainen (voidaan ottaa $x_1 = 1$), $x_2 = 0$.*

Siten ominaisavaruuden virittää vektori $[1,0]^T$.
Ominaisarvon 0 geometrinen kertaluku $m_0 = 1$. Siis $m_0 < M_0$. Sanotaan, että matriisi on defektiivinen. *Ominaisvektoreita ei ole "tarpeeksi", jotta niistä voitaisiin muodostaa $\mathbb{R}^2$:n kanta.*

Missään esimerkissämme ei ole esiintynyt epäyhtälöä toisinpäin, eli geometrinen on ollut aina korkeintaan algebrallinen. Tämä onkin yleinen ominaisuus:

Lause 1.2 *Yleisesti pätee: $m_\lambda \leq M_\lambda$. Aito $<$ on mahdollinen.*

Edellinen on jossain määrin syvällinen asia, perustelu on pakko sivuuttaa. Jälkimmäisen perustelee edellinen esimerkki.

Esimerkki 1.4 *KRE esim. 4 s. 375. Reaalinen matriisi, jolla on kompleksiset ominaisarvot (ja -vektorit)*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kyseessä on kiertomatriisi $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$, *kun kiertokulmana on* $\alpha = \pi/2$.

Nyt $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, *joten ominaisarvot ovat* $\lambda = \pm i$.

Lasketaan ominaisvektorit, ensin ominaisarvolle $\lambda = i$

Ratkaistavaksi tulee yhtälö $-ix_1 + x_2 = 0$. *Jos valitaan* $x_2 = 1$, *on* $x_1 = 1/i = -i$. *Saadaan ominaisvektoriksi* $[-i, 1]^T$.
Huomaa, että kompleksisella skalaarilla kertominen on nyt sallittua. Näin saadaan vektoreita, jotka eivät ensi silmäyksellä näytä lineaarisesti riippuvilta. Niinpä, jos kerromme vaikka i:llä, saamme yhtä hyvän kantavaktorin: $[1, i]^T$.

Ominaisarvoa $\lambda = -i$ *vastaava ominaisvektori saadaan samalla tavalla. Itse asiassa sitä ei tarvitse laskea, koska se on edellä lasketun ominaisvektorin liittovektori. Tällä tarkoitamme vektoria, jonka koordinaatit ovat edellisen liittolukuja.*

Todistetaan viimeksi todettu oikein lauseena.

Lause 1.3 *Reaalisen matriisin kompleksiset ominaisarvot ovat pareittain liittolukuja. Liittolukuja vastaavat ominaisvektorit ovat toistensa liittovektoreita.*

Ominaisarvoja koskeva johtopäätös voidaan tehdä kompleksiprujussa olevasta lauseesta: reaalikertoimisen polynomin kompleksiset juuret ovat toistensa liittolukuja.
Itse asiassa tätäkään ei tarvita, kun huomataan, että edellisen perustana olevasta, liittolukujen laskutoimituksia koskevasta lauseesta saadaan myös välittömästi sääntö $\overline{A\boldsymbol{v}} = \overline{A}\overline{\boldsymbol{v}}$.
Niinpä, jos $A\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$, *niin* $A\overline{\boldsymbol{v}} \underbrace{=}_{A \text{ on reaalinen}} \overline{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{A\,\boldsymbol{v}} \underbrace{=}_{A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}} \overline{\lambda\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{v}}$.
Johtopäätös seuraa siten suoraan ominaisarvon/-vektorin määritelmästä.

Tehtävä 1.1 *Laske yleisen kiertomatriisin* $A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ *ominaisarvot ja -vektorit. Millä kiertokulman arvoilla ovat reaaliset?*

Yhteenveto käsitteistä ja määritelmistä

1. Ominaisavaruus E_λ on ominaisarvoon λ kuuluvien ominaisvektorien joukko täydennettynä 0-vektorilla.
2. Spektri = ominaisarvojen joukko (kompleksitason osajoukko).
3. Spektraalisäde: itseisarvoltaan suurimman ominaisarvon itseisarvo. Se antaa ympyrän säteen, jonka sisällä kaikki ominaisarvot (eli spektrin pisteet) ovat.
4. Karakteristinen polynomi : $D(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, tasan astetta n.
5. Ominaisarvon λ_k **algebrallinen kertaluku** = p_k, kun karakteristinen polynomi esitetään tekijöihin jaetussa muodossa:

$$D(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{p_n}$$

Ominaisarvon λ_k algebrallinen kertaluku M_{λ_k} on siis potenssi p_k, jossa tekijä $(\lambda - \lambda_k)$ esiintyy.

6. **Geometrinen kertaluku** m_λ tarkoittaa vastaavan ominaisavaruuden dimensiota.
7. Pätee: $m_\lambda \leq M_\lambda$
8. Matriisi A on **defektiivinen**, jos jollain ominaisarvolla λ pätee aito pienemmyys: $m_\lambda < M_\lambda$. Tällöin matriisin ominaisvektoreita "puuttuu", niitä ei ole tarpeeksi, jotta niistä saataisiin $\mathbb{R}^n$:n (tai $\mathbb{C}^n$:n) kanta.

1.4 Sovellutusesimerkkejä

1.4.1 Joustavan kalvon venytys, lineaarikuvauksen pääakselit

Yksikkökiekko olkoon joustava kalvo, jota muotoilee "siirtymämatriisi"
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$
Määritä pääsuunnat, eli vektorit, joille venymä on mahdollsimman suuri/pieni. Tai: Suunnat, joissa siirtymä säilyy yhdensuuntaisena paikkavektorin kanssa. Matemaattisesti ilmaistuna: Määritä matriisin määräämän lineaarikuvauksen *pääakselit.*

Ratkaisu

Lasketaan ominaisarvot ja -vektorit, lukija tarkistakoon, että saadaan $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$ ja että vastaavat ominaisvektorit ovat $\boldsymbol{u}_1 = [1, 1]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [-1, 1]^T$

Ominaisvektorien käyttökelpoisuus näkyy nyt tässä: Saamme **ongelmaamme (matriisiin A) liittyen optimaalisen kannan** siinä mielessä, että A:n määräämä lineaarikuvaus saa mahdollisimman yksinkertaisen esityksen.

Ominaisvektorit ovat varmasti `LRT` (ne ovat jopa ortogonaaliset), joten ne muodostavat $\mathbb{R}^2$:n kannan.

Esitetään nyt mielivaltainen tason vektori $\boldsymbol{u}$ ominaisvektorikannassa: $\boldsymbol{u} = \xi_1 \boldsymbol{u}_1 + \xi_2 \boldsymbol{u}_2$.

Tällöin

$$\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{u} = \xi_1 A\boldsymbol{u}_1 + \xi_2 \, A \, \boldsymbol{u}_2 = \xi_1 \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \xi_2 \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 = 8\xi_1 \boldsymbol{u}_1 + 2\xi_2 \boldsymbol{u}_2.$$

Koordinaattien välinen kuvaus on "ihana": $[\xi_1, \xi_2] \mapsto [8\xi_1, 2\xi_2]$. Kumpikin kuvakoordinaatti riippuu vain omasta lähtökoordinaatistaan, ts. se saadaan diagonaalimatriisilla kertomalla. Jos kuvapisteen koordinaatteja (ominaisvektorikannassa) merkitään (η_1, η_2), saadaan

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Tässä tapauksessa sattuu vielä niin onnellisesti, että ominaisvektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa [1] , jolloin meillä on uusi luonteva suorakulmainen koordinaatisto, johon

[1] Jos osaisimme teoriaa enemmän, tietäisimme jo matriisin ulkonäöstä, että näin käy, koska matriisi on symmetrinen.

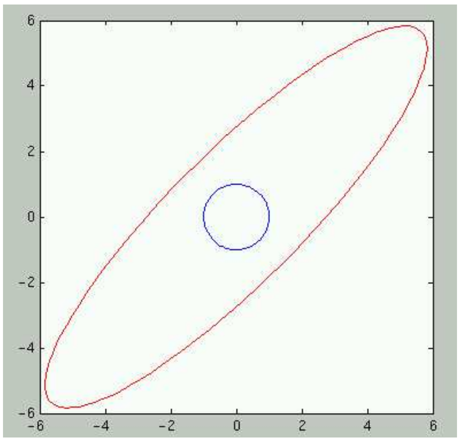
voimme astua ja esittää pisteiden koordinaatit normaalissa napakoordinaatistossa $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2$-akselien suhteen. Otetaanpa siis jokin yksikköympyrän piste: $(\cos\phi)\boldsymbol{u}_1 + (\sin\phi)\boldsymbol{u}_2$. Sen kuvapiste on siis $(8\cos\phi)\boldsymbol{u}_1 + (2\sin\phi)\boldsymbol{u}_2$.

Kuvapisteet piirtävät siten ellipsin, jonka esitys pääakselikoordinaatistossa $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2$ on

$$\begin{cases} \eta_1 = 8\cos\phi \\ \eta_2 = 2\sin\phi \end{cases},$$

Toisin sanoen

$$\left(\frac{\eta_1}{8}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{2}\right)^2 = 1.$$



Kuva 1: Yksikköympyrä ja sen kuva

Esimerkkiin liittyvä **Matlab-ajo** on tiedostossa
`http://math.tkk.fi/teaching/k3/03/L/paakseli.m`

1.4.2 Stokastinen matriisi, Markovin prosessi

KRE8 s. 318 ("matrix multiplication")

Oletetaan, että vuonna 2005 erään kaupungin maankäyttö jakaantuu näin:

```
I     asuntoalue                30%
II    kaupallinen käyttöalue    20%
III   teollisuusalue            50%
```

Oletetaan, että siirtymätodennäköisyydet 5-vuotisjakson aikana saadaan matriisista

P=

I:stä	II:sta	III:sta	
0.8	0.1	0	I:een
0.1	0.7	0.1	II:een
0.1	0.2	0.9	III:een

[2]

Tarkemmin sanottuna merkittäköön tyyppejä I, II ja III olevia maa-alueita 5-vuotisjakson lopussa vektorilla $\boldsymbol{x}_n = [a_n, k_n, t_n]^T$. Seuraavan 5-vuotisjakson lopussa pätee $\begin{cases} a_{n+1} = 0.8\,a_n + 0.1\,k_n \\ k_{n+1} = 0.1\,a_n + 0.7\,k_n + 0.1\,t \\ t_{n+1} = 0.1\,a_n + 0.2\,k_n + 0.9\,t \end{cases}$

Sarakesummien on oltava ykkösiä, koska jokainen tyyppi muuttuu joksikin näistä kolmesta tyypistä, eikä miksikään muuksi. (Rivisummat eivät yleensä ole ykkösiä.) Matriisin lävistäjävaltaisuus kertoo sen, että kutakin tyyppiä olevasta alueesta suurin osa säilyy samaa tyyppiä olevana.

Kysymys siitä, mikä on tilanne m:n 5-vuotisjakson jälkeen, ratkeaa pelkästään matriisikertolaskulla.

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 50 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_1 = P\,\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 26.0 \\ 22.0 \\ 52.0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = P\,\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 23.0 \\ 23.2 \\ 53.8 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x}_3 = P\,\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 20.72 \\ 23.92 \\ 55.36 \end{bmatrix}, \ldots$$

Matlabilla voitaisiin iteroida vaikka tähän tapaan.

```
>> P=[0.8 0.1 0;0.1 0.7 0.1;0.1 0.2 0.9]
>> x0=[30;20;50];
>> x0'
ans =
    30    20    50             % v. 2005
>> x=x0                        % x olkoon muuttuja, johon iterointi kohdistuu.
>> x=P*x; x'                   % Tilan säästämiseksi katsotaan vaakasuorassa.
ans =
    26    22    52             % v. 2010
>> x=P*x; x'
ans =
   23.0000   23.2000   53.8000  % v. 2015
>> x=P*x; x'
ans =
   20.7200   23.9200   55.3600  % v. 2020
```

Tämä oli siis pelkkää matriisikertolaskuharjoittelua.

Ominaisarvoteoria tulee mukaan, kun kysellään, mitä tapahtuu pitkällä aikavälillä. Voidaan tietysti harrastaa matriisikertolaskua raakaan voimaan turvautuen, mutta se ei anna eväitä analysoida tilannetta.

Lasketaanpa ominaisarvot ja -vektorit. Emme uppoudu tässä ominaisarvolaskujen yksityiskohtiin, niitä on jo harjoiteltu. Toisaalta on hyvä nähdä, miten laadukkaita numeerisia ohjelmia käytetään ominaisarvotehtävissä. Siksi näytetään tämä MATLAB:lla laskettuna.

[2] P on sama kuin KRE-kirjan A^T, kirjassa kerrotaan matriisilla oikealta rivivektoria, kun taas me kerromme vasemmalta sarakevektoria.

```
>> P=[0.8 0.1 0;0.1 0.7 0.1;0.1 0.2 0.9]
P =

    0.8000    0.1000         0
    0.1000    0.7000    0.1000
    0.1000    0.2000    0.9000
>> [V,D]=eig(P)

V =
   -0.1826   -0.7071    0.4082    Ominaisvektorit ovat
   -0.3651    0.0000   -0.8165    sarakkeina.
   -0.9129    0.7071    0.4082
D =
    1.0000         0         0    Ominaisarvot ovat
         0    0.8000         0    diagonaalilla.
         0         0    0.6000
>> V*diag(1./V(1,:))          % Ominaisvektorien skaalaus.
ans =
    1.0000    1.0000    1.0000
    2.0000    0.0000   -2.0000
    5.0000   -1.0000    1.0000
```

MATLAB-komento `[V,D]=eig(P)` paluttaa kaksi matriisia, `V`:n sarakkeina ovat ominaisvektorit normeerattuna yksikkövektoreiksi. Matriisi D on diagonaalimatriisi, jonka lävistäjällä ovat vastaavat ominaisarvot. Viimeinen matriisi on tehty jakamalla kukin ominaisvektori ensimmäisellä komponentillaan, jolloin päästään (tässä tehtävässä) mukaviin kokonaislukukomponentteihin. (Komento sisältää hiukan MATLAB-ajattelutavan sisäistäneen käyttäjän tarjoilemaa eleganssia, toki voi tehdä (salaa) kömpelömminkin.)

Nähdään, että kaikki ominaisarvot ovat positiivisia, suurin on 1 ja muut ovat pienempiä. Myöhemmin osoitetaan, että eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat `LRT`. Kun ei sitä vielä ole esitetty, niin ei muuta kuin ”gaussataan”.

```
>> rref(V)
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Kaikki sarakkeet ovat tukisarakkeita, joten V :n sarakkeet ovat varmasti `LRT`.

Siispä ne muodostavat $\mathbb{R}^3$:n kannan. Aivan, kuten äskeisessä esimerkissä, saadaan mahdollisimman yksinkertainen tilanne operoimalla ominaisvektorikannassa.

Merkitään ominaisvektoreita: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, ja esitetään:

$\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$. Koska $P\,\boldsymbol{v}_k = \lambda_k\,\boldsymbol{v}_k, \quad k = 1, 2, 3$, on
$\boldsymbol{x}_1 = P\boldsymbol{x}_0 = c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\lambda_3\boldsymbol{v}_3$, missä $\lambda_1 = 1$.

Jatkamalla iterointia, saadaan:

$\boldsymbol{x}_k = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}_2 + c_3\lambda_3^k\boldsymbol{v}_3$.

Koska $0 < \lambda_j < 1$, kun $j = 2, 3$, lähenevät 2 viimeistä termiä kohti 0:aa, kun k kasvaa. Siten prosessia dominoi ykköstä (suurinta) ominaisarvoa vastaava ominaisvektori.

Rajalla päädytään vektoriin $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1$. Kerroin c_1 voidaan määrätä lausumalla alkupistevektori $\boldsymbol{x}_0$ ominaisvektorikannassa. Helpompaa on kuitenkin todeta, että kaikki vektorit $\boldsymbol{x}_k$ ovat prosenttilukuja (johtuen ehdosta: sarakesummat = 1), joten myös rajavektorin $\boldsymbol{x}$ komponenttien summan on oltava 100.

Siispä $c_1 = \frac{100}{1+2+5} = 12.5$ ja siis $x = [12.5, 25, 62.5]^T$.

Merkillepantavaa on, että tulos ei riipu alkujakaumasta lainkaan, vaan määräytyy pelkästään matriisin P dominoivasta ominaisvektorista.

1.4.3 Populaatiodynamiikkaa

Esimerkki 1.5 (Täpläpöllöjen henkiinjäämistaistelu Kaliforniassa) *Vuonna 1990 oli vastakkainasettelu puuteollisuuden ja ympäristönsuojelijoiden välillä. Vanhojen ikimetsien hakkuut ja sen seurauksena mm. täpläpöllöjen tuhoutuminen, vastaan* $30000 \ldots 100000$ *työpaikan menetys puuteollisuudessa.*

Matemaatikot ryhtyivät viileän objektiivisesti tutkimaan.

Täpläpöllön elinkaari voidaan jakaa kolmeen luokkaan:
1. Lapsuus, $0 - 1$ *v., 2. esiaikuisuus,* $1 - 2$ *v., 3. aikuisuus, yli* 2 *v.*
Keskimääräinen elinikä n. 20 *v.*

Kriittinen ajanjakso on silloin, kun lapsipöllö lähtee pesästään, jolloin sen on löydettävä uusi kotialue ja pari.

Mallinnetaan tilannetta tarkastelemalla populaatiota vuoden välein ja jakamalle se näihin kolmeen luokkaan. Oletetaan, että naaraita ja uroita on samanverran, jolloin tarvitsee tarkastella vain naisväkeä.

Populaatiovektori vuonna k olkoon $\boldsymbol{x}_k = [l_k, e_k, a_k]$ *("lapsi", "esiaikuinen", "aikuinen").*

$$\begin{bmatrix} l_{k+1} \\ e_{k+1} \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.33 \\ 0.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.71 & 0.94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_k \\ e_k \\ a_k \end{bmatrix}$$

1. rivi: Kukin aikuinen naaras synnyttää keskimäärin 0.33 *tyttölapsipöllöä vuonna k (vuoden k+1 alkuun mennessä).*
2. rivi: Keskimäärin 0.18 *tyttölasta selviytyy esiaikuiseksi vuoden* $k+1$ *alkuun.*
3. rivi: Vuoden k esiaikuisista 0.71 *selviytyy aikuisuuteen ja aikuisista* 0.94 *jatkaa aikuiselämää vuonna* $k+1$.

Yllä olevaa matriisia A voidaan kutsua "vaihematriisiksi"("stage matrix"). Tämä on peräisin oikeasta tutkimusaineistosta:

Lamberson et. al: Dynamic analysis of the viability of the Northern spotted owl in a fragmented forest environment, julkaisussa: Conservation biology vuodelta 1992.

Tässä matriisissa alkio $a_{2,1} = 0.18$ on kriittisin ympäristötekijöiden vaikutuksille. Jos ikimetsät hakataan aukeiksi, niin tämä arvo käy liian pieneksi. Arvo 0.18 on jo liian pieni, kuten nähdään, jos analyysi viedään päätökseen.

Muotoa $\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k$ olevaa systeemiä sanotaan **differenssiyhtälöksi**, usein puhutaan myös diskreetistä dynaamisesta systeemistä.

Yllä oleva esimerkki on peräisin kirjasta [Lay] KRE-kirjassa [KRE] vastaavanlainen esimerkki esiintyy nimellä *Leslie model* s. 378, Example 3

Palattaneen tähän esmerkkiin myöhemmin.

Maailman suurin ominaisarvotehtävä – Googlen "Page rank"

Vuonna 2002 toukokuussa 2.7 miljardia webbisivua. The World's Largest Matrix Computation Google's PageRank is an eigenvector of a matrix of order 2.7 billion. (Huom: amerikkalaisille biljoona on sama kuin meille miljardi (10^9).)

`www.mathworks.com/company/newsletters/news_notes/clevescorner/oct02_cleve.html`

1.5 Matriisin diagonalisointi, ominaisvektorien LRT

(KRE 7.5)

Edellisissä esimerkeissä näimme, miten riemukasta oli, kun LRT ominaisvektoreita oli riittävästi, avaruuden kannaksi saakka. Tässä kohdassa todetaan, että LRT ominaisvektoreita on ainakin yhtä monta kuin on erillisiä ominaisarvoja.

Esitämme myös yleisessä matriisimuodossa saman asian, jonka esimerkeissämme laskimme tapauksessa, jossa ominasivektoreita on riittävästi. Tätä sanotaan matriisin diagonalisoinniksi.

Määritelmä 1.3 *Neliömatriisit A ja B ovat* similaariset, *jos on olemassa säännöllinen (kääntyvä) P siten, että*

$B = P^{-1}AP$. Merkitään $A \sim B$.

Lause 1.4 *[Similaarisuus säilyttää ominaisarvot, KRE Thm 1]*

Olkoon annettu A ja olkoon $B = P^{-1}AP$.

Tapa 1) Olkoon $\boldsymbol{x}$ matriisin A ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori. Siis $A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, joten $P^{-1}A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,P^{-1}\boldsymbol{x}$. Kirjoitetaan A :n ja $\boldsymbol{x}$:n väliin $I = P\,P^{-1}$ ja merkitään $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$. Siis

$\underbrace{P^{-1}A\,P}_{B}\,\underbrace{P^{-1}\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}} = P^{-1}A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\underbrace{P^{-1}\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{y}}$, eli $B\,\boldsymbol{y} = \lambda\,\boldsymbol{y}$. Kaiken lisäksi $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$, sillä muutenhan olisi $\boldsymbol{x} = P\,\boldsymbol{y} = P\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$, vastoin $\boldsymbol{x}$:n ominaisvektoriutta.
Niinpä λ on myös B :n ominaisarvo (ja $\boldsymbol{y}$ on vastaava B :n ominaisvektori).

Tapa 2) $D_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda\,I)P) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I) = D_A(\lambda)$. *(Tässä käytettiin determinanttien kertosääntöä.)*

Nyt tulemme mainittuun ominaisvektorien LRT-lauseeseen.

Lause 1.5 *[KRE s. 392] Olkoot $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ matriisin A erillisiä ominaisarvoja. Tällöin vastaavat ominaisvektorit ovat* `LRT`

1) Todistetaan ensin 2:n ominaisvektorin tapauksessa. Olk. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ja olkoot $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$ vastaavat ominaisvektorit.

Kirjoitetaan vektoriyhtälö $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$.

Sovelletaan siihen A:ta (eli kerrotaan vasemmalta A:lla) ja käytetään ominaisuutta $A\boldsymbol{v_j} = \lambda_j\boldsymbol{v}_j, j = 1, 2$.

Näin saadaan vektoriyhtälöpari: $\begin{cases} c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \\ \lambda_1\, c_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\, c_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$

Kerrotaan 1. yhtälö λ_1 :llä ja vähennetään alemmasta ylempi, niin saadaan: $c_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$. koska $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, on oltava $c_2 = 0$ ja siten myös $c_1 = 0$.

Siten myös $c_1 = 0$.

2) Askel tapauksesta $k = 2$ tapaukseen $k = 3$ saadaan lähtemällä vektoriyhtälöstä

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Aivan samanlaisella eliminaatioaskeleella kuin edellä, päästään jo todistettuun tapaukseen $k = 2$. Tarkemmin sanottuna kerrotaan yhtälö A :lla ja otetaan huomioon $A\,\boldsymbol{v}_k = \lambda_k\,\boldsymbol{v}_k, k = 1, 2, 3$. Saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \\ \lambda_1\, c_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\, c_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_3\, c_3\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Kerrotaan 1. yhtälö λ_1 :llä ja vähennetään toisesta $\Longrightarrow$ $c_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{v}_2 + c_3(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$.

Edellä todistetun perusteella $\boldsymbol{v}_2$ ja $\boldsymbol{v}_3$ ovat `LRT`, joten $c_2 = c_3 = 0$, koska $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ ja $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$. Tästä seuraa yhtälön 1. perusteella: $c_1 = 0$. Niinpä $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ on `LRT`.

Yleinen induktioaskel $k \to k + 1$ on aivan samanlainen.

Tästä seuraa välittömästi:

Lause 1.6 *Jos $n \times n$-matriisilla A on n erillistä ominaisarvoa, niin $\mathbb{R}^n$:llä (kompl. tap. $\mathbb{C}^n$:llä) on A:n ominaisvektoreista koostuva kanta.*

Tätä käyttäen oltaisiin *Markov-prosessi*-tehtävässä voitu välttyä ei-dominoivien ominaisvektoreiden laskemiselta.

Huomautus 1.2 *Ominaisvektorikanta voi olla, vaikka esiintyisi moninkertaisia ominaisarvoja, kuten on nähty. Toisaalta olemme nähneet esimerkkejä (ainakin yhden), jossa käy huonosti: 2×2-matriisilla on vain yksi ominaissuora.*

Lause 1.7 *$\mathbb{R}^n$:llä ($\mathbb{C}^n$:llä) on A:n ominaisvektorikanta, jos ja vain jos A:n jokaisen ominaisarvon algebrallinen ja geometrinen kertaluku yhtyvät, ts. kaikilla ominaisrvoilla λ on $m_\lambda = M_\lambda$.*

Muistamme, että aina pätee $m_\lambda \leq M_\lambda$. Olkoot erilliset ominaisarvot $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, ja niiden algebralliset kertaluvut $k_1, \ldots, k_p$. Siis $k_1 + \ldots + k_p = n$.

1) Jos kertaluvut eivät yhdy, niin jollain ominaisarvolla λ_j on $m_{\lambda j} < M_{\lambda j}$. Koska jokainen ominaisvektori kuuluu johonkin ominaisavaruuteen, ei LRT ominaisvektoreita voi olla enempää kuin ominaisavaruuksien dimensioiden summa, joka nyt on aidosti pienempi kuin algebrallisten kertalukujen summa $= n$. Siten ominaisvektorikantaa varten ei ole tarpeeksi LRT vektoreita. (Tässä emme tarvitse edes lausetta 1.5(s. 20).)

2) Oletetaan, että $m_{\lambda_j} = M_{\lambda_j}$ kaikilla $j = 1, \ldots, p$.

Nyt lause 1.5 on kaiken avain. Kyse on yksinkertaisesti siitä, että jos niputetaan kutakin erillistä ominaisarvoa vastaavien ominaisavaruuksien kannat omiksi nipuikseen, saadaan yhteensä n vektoria, jotka ovat LRT.

Otetaan havainnollisuuden vuoksi vaikka kolme ominaisarvoa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, joiden kertaluvut olkoot $1, 2, 3$ vastaavasti. Olkoot “vektoriniput” $\{\boldsymbol{u}\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$.

Olkoon $(c_1\boldsymbol{u}) + (c_2\boldsymbol{v}_1 + c_3\boldsymbol{v}_2) + (c_4\boldsymbol{w}_1 + c_5\boldsymbol{w}_2 + c_6\boldsymbol{w}_3) = 0$.

Suluissa olevat vektorilausekkeet ovat kaikki nollavektoreita. Jos nimittäin joku ei olisi, niin otettaisiin summaan kaikki nollasta erilliset sulkulausekkeet. Nämä ovat eri ominaisarvoihin liittyviä ominaisvektoreita, ja siis LRT. Niiden summa $= \mathbf{0}$, joten ristiriita LRT:n kanssa on valmis.

Kussakin sulkulausekkeessa esiintyvät vektorit ovat ao. ominaisavaruuden kantavektoreita (siis LRT), joten on oltava: $(c_1 = 0), (c_2 = c_3 = 0), (c_4 = c_5 = c_6 = 0)$.
Yleinen ”niputus”menee pariaatteessa aivan vastaavasti.

Huomautus 1.3 *Olennainen asia tuossa ”niputuspäättelyssä”on tieto, että otettiinpa mitkä tahansa vektorit eri nipuista, niin ne ovat* `LRT`.

Erilaisten matriisityyppien (kuten symmetristen, ortogonaalisten ym.) ominaisvektorikäytöstä selvitetään jatkossa.

Ominaisvektorikannan merkitys, diagonalisointi

Olkoon $n \times n$- matriisilla A n LRT ominaisvektoria $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, jotka siis muodostavat $\mathbb{R}^n$:n (tai $\mathbb{C}^n$:) kannan. Suoritetaan yleisesti sama lasku, joka tehtiin sovellusesimerkkien tapauksessa.

Olkoon $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, esitetään se tämän kannan avulla: $\boldsymbol{x} = c_1\, \boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\, \boldsymbol{u}_n$ Samoin kuin edellä olleissa esimerkissä (pääakseliesitys, Markovin prosessi) voidaan silloin laskea: $A\, \boldsymbol{x} = c_1\, A\, \boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\, A\, \boldsymbol{u}_n = \lambda_1\, c_1\, \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \lambda_n\, c_n\, \boldsymbol{u}_n$.

Jos ajatellaan matriisia A lineaarikuvauksena $T = T_A$, niin vektorin $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ kuvan $\boldsymbol{y} = A\, \boldsymbol{x}$ koordinaatit avaruuden peruskannassa saadaan matriisikertolaskulla: $y_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j$. Siis kukin kuvapisteen koordinaatti riippuu ”mutkikkaan”kaavan välityksellä kaikista lähtöpisteen koordinaateista.

Jos sensijaan esitetään $\boldsymbol{x}$ ominaisvektorikannassa, niin kuvapisteen j :s koordinaatti saadaan kertomalla lähtöpisteen sama j :s koordinaatti luvulla λ_j. Siten kuvan koordinaatti j riippu pelkästään lähtöpisteen koordinaatista j.

Matriisimuodossa kuvavektorin $\boldsymbol{y} = A\,\boldsymbol{x}$ esitys ominaisvektorikannassa saadaan kertomalla $\boldsymbol{x}$:n koordinaattiesitys $[c_1, \ldots, c_n]^T$ diagonaalimatriisilla $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

Todetaan siis, että A :n määräämän lineaarikuvauksen matriisi ominaisvektorikannan suhteen on diagonaalimatriisi.

Asia voidaan esittää puhtaana matriisiyhtälönä, matriisin diagonalisointiesityksenä.

Lause 1.8 (Diagonalisointi) *Olkoon $n \times n-$matriisilla A n kpl LRT ominaisvektoreita (eli $\mathbb{R}^n$:n tai $\mathbb{C}^n$:n kanta). Tällöin A voidaan esittää muodossa $A = XDX^{-1}$, missä D on diagonaalimatriisi. Tässä esityksessä X:n sarakkeet ovat A :n ominaisvektorit ja D :n diagonaalilla ovat A :n ominaisarvot samassa järjestyksessä.*

Olkoon $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ A :n ominaisvektorikanta ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ A :n vastaavat ominaisarvot. Siis
$A\,\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\,\boldsymbol{x}_1, \ldots, A\,\boldsymbol{x}_n = \lambda_n\,\boldsymbol{x}_n$. Nämä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälönä:

$$A\,[\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2|\ldots|\boldsymbol{x}_n] = [\lambda_1\,\boldsymbol{x}_1|\lambda_2\,\boldsymbol{x}_2|\ldots|\lambda_n\boldsymbol{x}_n]\,,$$

missä $X = [\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2|\ldots|\boldsymbol{x}_n]$ on matriisi, jossa ominaisvektorit $\boldsymbol{x}_j$ ovat sarakkeina.

Jälkimmäinen matriisi, jossa j :s sarake on kerrottu luvulla λ_j, voidaan esittää diagonaalimatriisina kertomisena oikealta:

$$[\lambda_1\,\boldsymbol{x}_1|\lambda_2\,\boldsymbol{x}_2|\ldots|\lambda_n\boldsymbol{x}_n] = X\,D, \quad \text{missä} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Näin saadaan yhtälö $A\,X = X\,D$. Tässä ei tehty mitään muuta kuin kirjoitettiin ominaisarvojen ja -vektorien määritelmät yhdeksi matriisiyhtälöksi. (Tähän saakka olisimme päässeet olettamatta ominaisvektoreita lineaarisesti riippumattomiksi.)

No nyt, koska ne ovat `LRT`, niin matriisin X rangi on täysi n (eli kaikki sarakkeet ovat tukisarakkeita). Niinpä on olemassa käänteismatriisi X^{-1}. Kun kerrotaan tuo matriisiyhtälö oikealta X^{-1} :llä, saadaan väitetty esitys: $A = X\,D\,X^{-1}$.

Määritelmä 1.4 *Matriisia A sanotaan* diagonalisoituvaksi*, jos edellisen lauseen ehto on voimassa.*

Huomautus 1.4 *Esityksen yksikäsitteisyydestä:*
1) Alkuperäiset yhtälöt voidaan kirjoittaa eri järjestyksessä, mikä aiheuttaa sarakkeiden järjestyksen vaihdon. Tärkeää on, että ominaisvektorit matriisissa X ja ominaisarvot matriisissa D otetaan samassa järjestyksessä.
2) Ominaisvektorit voidaan skaalata millä tahansa nollasta poikkeavalla kertoimella. (Mitään "luonnollisinta"skaalausta ei edes voida esittää.) Tämä kompensoituu käänteismatriisin muodostamisessa, jossa ao. sarake tulee jaetuksi vastaavalla skaalauskertoimella.

Matriisin potenssit

Differenssiyhtälön $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\,\boldsymbol{x}_n$ ratkaisu on $\boldsymbol{x}_n = A^n\,\boldsymbol{x}_0$. Tästä syystä on usein tarvetta laskea matriisin potensseja tehokkaasti. Samalla voi paljastua seikkoja, jotka mahdollistavat prosessin analysoinnin.

Jos matriisi A on diagonalisoituva, voidaan kirjoittaa $A = X\,D\,X^{-1}$. Nyt

$$A^2 = X\,D\,\underbrace{X^{-1}\,X}_{I}\,D\,X^{-1} = X\,D^2\,X^{-1}.$$

Jatkamalla samoin nähdään, että $A^k = X\,D^k\,X^{-1}$.

Koska samankokoisten diagonaalimatriisien tulo on diagonaalimatriisi, jonka lävistäjä koostuu tekijämatriisien diagonaalialkioiden tuloista, pätee $(\mathrm{diag}([\lambda_1,\ldots,\lambda_n])^k = \mathrm{diag}(\left[\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k\right])$. (Käytämme Matlab:n tyylistä notaatiota diagonaalimatriisille, se on helppo kirjoittaa, säästää tilaa ja on itsensä selittävä.)

Esimerkki 1.6 *Laske lauseke A^k:lle, kun* $A = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ratkaisu Diagonalisoidaan:
$A = VDV^{-1}$,
$V = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.
Nyt $A^k = VD^kV^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.
Kun suoritetaan kertolaskut, saadaan:

$$A^k = \begin{bmatrix} -3\,2^k + 4 & 12\,2^k - 12 \\ -2^k + 1 & 4\,2^k - 3 \end{bmatrix}$$

Saatiin jopa yksinkertainen kaava A^k:lle. Joka tapauksessa saadaan valtava säästö aritmetiikassa ja usein selkeä näkemys alunperin sotkuiseen asiaan.

Esimerkki 1.7 *Lasketaan yksi esimerkki* Matlab*:lla. Tässä näkyy samalla* Matlab*:n kätevyys matriisioperaatioissa. Alla oleva* `eig`*-komento on hyvä esimerkki tarkoituksenmukaisesta suunnittelusta ("intelligent design").*
Esimerkin pitäisi selittää hyvin itsensä myös henkilölle, joka ei ole Matlab*:ia koskaan käyttänyt.*

```
>> A=[0 -4 -6;-1 0 -3;1 2 5]   % Muodostetaan matriisi A.
A =

     0    -4    -6
```

```
    -1     0    -3
     1     2     5
>> [V,D]=eig(A)                 % Ominaisvektorit V:n sarakkeiksi,
V =                             % ominaisarvot D:n diagonaalille·
   -0.8165    0.5774   -0.9269
   -0.4082    0.5774   -0.0850
    0.4082   -0.5774    0.3656
D =
    1.0000         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    2.0000

                                % Koska 2 on kaksinkertainen ominaisarvo,
                                % emme tiedä, onko V kääntyvä.
>> VI=inv(V)                    % Voidaan käyttää inv-komentoa käänteismatriisin
VI =                            % muodostamiseen.(Jos sitä ei ole, tulee ‘‘herja’’)

   -2.4495   -4.8990   -7.3485
   -1.7321   -1.2075   -4.6716
         0    3.5634    3.5634
```

Tarkistetaan, laitetaan A ja VDV^{-1} vierekkäin (ja lisätään rajaviiva editoimalla).

```
>> [A V*D*VI]
ans =

         0   -4.0000   -6.0000  |  -0.0000   -4.0000   -6.0000
   -1.0000         0   -3.0000  |  -1.0000   -0.0000   -3.0000
    1.0000    2.0000    5.0000  |   1.0000    2.0000    5.0000
```

Tästäpä nähdään, että A ja $V\,D\,V^{-1}$ ovat samat.

Matriisin A potensseja

Lasketaan vaikkapa A^{16}.

```
>> A^16

ans =

      -65534     -262140     -393210
      -65535      -65534     -196605
       65535      131070      262141
```

Lasketaan diagonalisoimalla:

```
>> D16=D^16
D16 =

   1.0e+04 *

    0.0001         0         0
         0    6.5536         0
         0         0    6.5536
```

Näin ei oikeastaan kannattaisi laskea. Nyt voimme nimittäin laskea pisteittäisen potenssin, kun on kyse diagonaalimatriisista. Silloin aritmetiikkaa on paljon vähemmän.

```
>> D16=D.^16   % diag(diag(D).^16) % olisi vielä tehokkaampi (help diag)
D16 =
   1.0e+04 *

    0.0001         0         0
         0    6.5536         0
         0         0    6.5536

>> format bank
>> V*D16*VI

ans =

     -65534.00    -262140.00    -393210.00
     -65535.00     -65534.00    -196605.00
      65535.00     131070.00     262141.00
>> A^16  % Tässä taas vertailuksi raakaa voimaa:
ans =
     -65534.00    -262140.00    -393210.00
     -65535.00     -65534.00    -196605.00
      65535.00     131070.00     262141.00
```

Maankäyttöesimerkki diagonalisoimalla

Edellä esitettiin lähtövektori ominaisvektorikannan avulla. Katsotaan, miltä homma näyttäisi diagonalisoimalla. Esitetään matriisi P muodossa $P = VDV^{-1}$. Iteraatiojonon k:s termi on $x_k = P^k x_0$. Mutta $P^k = VD^kV^{-1}$.

$$D^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8^k & 0 \\ 0 & 0 & 0.6^k \end{bmatrix} \quad \text{Kun } k \to \infty \text{, niin } Dlim = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> P=[0.8 0.1 0;0.1 0.7 0.1;0.1 0.2 0.9]
>> [V,D]=eig(P)
```

```
V =

   -0.1826   -0.7071    0.4082
   -0.3651   -0.0000   -0.8165
   -0.9129    0.7071    0.4082


D =

    1.0000         0         0
         0    0.8000         0
         0         0    0.6000
>> VI=inv(V)

VI =

   -0.6847   -0.6847   -0.6847
   -1.0607   -0.3536    0.3536
    0.3062   -0.9186    0.3062


>> Dlim=diag([1,0,0])

Dlim =

     1     0     0
     0     0     0
     0     0     0

>> V*Dlim*VI

ans =

    0.1250    0.1250    0.1250
    0.2500    0.2500    0.2500
    0.6250    0.6250    0.6250

>> Plim=V*Dlim*VI

Plim =

    0.1250    0.1250    0.1250
    0.2500    0.2500    0.2500
    0.6250    0.6250    0.6250

>> Plim*[30 20 50]'
```

```
ans =

   12.5000
   25.0000
   62.5000

>> Plim*[99 .5 .5]'

ans =

   12.5000
   25.0000
   62.5000
```

Samaan päädyttiin kuin ennen.

Ominaisvektorikanta vai diagonalisointi

Kysehän on samasta asiasta esitettynä eri muodossa. Tämäntyyppisissä tehtävissä näyttäisi aiemmin esitetty ominaisvektorikannalla operointi matriisin diagonalisointiesitystä lyhyemmältä tavalta.