14.12.06

KA

Laplacen yhtälö, 2-ulotteinen tasapainolämpötilajakauma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Lämpöä johtava levy, joka on tahkopinnoiltaan eristetty.
Haetaan ajasta riippumatonta tasapainolämpötilajakaumaa ("steady state").

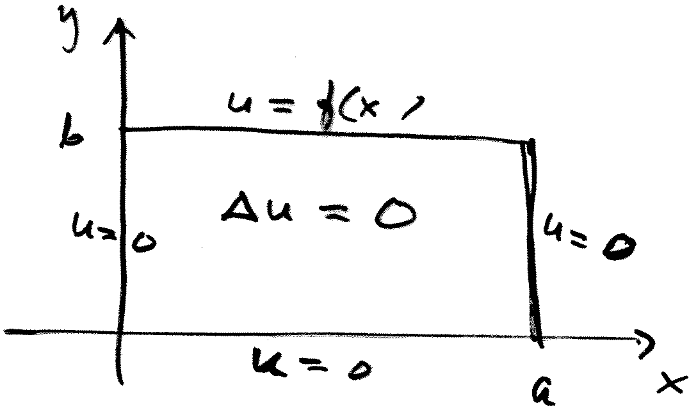
Siis $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} = 0$.

Näin johdutaan 2-ulotteiseen Laplacen yhtälöön

$$\text{(Lap)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Reuna-arvotehtävä ko. alueessa $\subset \mathbb{R}^2$

- Dirichlet'n ongelma: u annettu reunalla.
- Neumannin —"— : $\frac{\partial u}{\partial n}$ —"—"—
  (normaaliderivaatta)
- Sekaongelma: osalla reunaa Dirichl., osalla Neumann



Yritä:
$$u(x,y) = F(x)G(y)$$

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F''(x)G(y) + F(x)G''(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = -k \quad (k>0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) + kF(x) = 0 \\ G''(y) - kG(y) = 0 \end{cases}$$

(Jos olisi $+k>0$, saataisiin reunaehdosta $F(0)=0$: $F(x) = C \sinh \frac{n\pi x}{a}$, jolloin $F(a) \neq 0$ (kun $C \neq 0$).)

Kuten lämpöyhtälössä (sauva, 0-RE:t), saadaan
$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \left(k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)$$

$$G(y) = c_1 e^{\sqrt{k}\,y} + c_2 e^{-\sqrt{k}\,y}$$

Alareuna $G(0)=0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$$\Rightarrow G(y) = C \sinh(\sqrt{k}\,y) = C \sinh \frac{n\pi}{a} y$$

$$u_n(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

yläreunalla:

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{c_n \sinh\frac{n\pi b}{a}}_{b_n} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$\parallel$$

$$\phi(x)$$

Oltava $\quad c_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$

$$\Longrightarrow \quad c_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a \phi(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

Esimerkkejä:

L/ Laplacen yhtälö.

Mm. kolmiomaisen yläreunalämpötila.

Lämpötilajakauma näkyy pintakuvana ja leikkauskäyrinä, y = vakio.

NYT PÄÄTTYY VIIMEINEN

"VIRTUAALILUENTOKIN"!