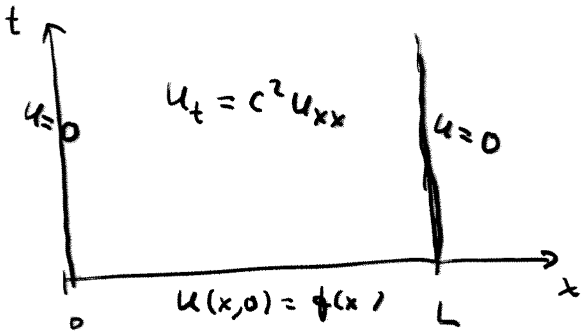
# Lämpöyhtälö




$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) + p^2 F(x) = 0 \\ G'(t) + c^2 p^2 G(t) = 0 \end{cases}$$

[ Jos olisi – (ts. $\frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = +p^2$),

$$\Rightarrow \quad F(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$$

$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = c \sinh(px)$.

Mutta $\sinh(px)$ kasvava, $\sinh 0 = 0$,
joten $\sinh(pL) > 0 \quad \forall p > 0$.

Olisko $p = 0$ mahdollinen ?

$$\Rightarrow \quad F''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = ax + b$$

$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = 0}$. $\quad F(L) = 0$

$\Rightarrow \quad aL = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 0}$. EI KÄY! ]

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

$0 = F(0) = A$; $\quad B \sin pL = 0 \quad \Rightarrow \quad pL = n\pi$,
$n = 1, 2, \ldots$

$$p = \frac{n\pi}{L}$$

$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

$G(t) = C e^{-c^2 p^2 t}$; $\quad G_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}$,

missä $\lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}$

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

TOTEUTTAVAT (LY):n ja 0-RE:t.

Myös $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}$,

missä $B_n$:t vapaasti valittavissa (tosin niin, että sarja suppenee)

(AE): $u(x,0) = f(x)$ (annettu funktio)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

|| VAATIMUS

$f(x)$ TOTEUTUU VALITSEMALLA $B_n = b_n$ = $f$:n $2L$-jaksoisen sinisarjan kertoimeksi:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Esim 1 Määritä lämpötila $u(x,t)$ sivuiltaan eristetyssä 80cm pituisessa kuparisauvassa, kun sauvan päät pidetään 0°:ssa ja alkulämpötila: $f(x) = 100\sin\frac{\pi x}{80}$.
Miten pitkän ajan kuluttua keskipisteen lämpötila on pudonnut puoleen alkuperäisestä?
Kuparille $c^2 = 1.158$ (cm²/s)

Ratk: Lämpöyhtälö + 0 - RE:t toteutuvat funktioilla $u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t}$,

missä $\lambda_n = \frac{nc\pi}{L} = \frac{nc\pi}{80}$

AE: $u(x,0) = f(x) = 100 \sin\frac{\pi x}{80}$

Mutta tämähän saadaan suoraan ensimmäisellä kantafunktiolla
$$u_1(x,t) = \sin\frac{\pi x}{80}\, e^{-\lambda_1^2 t},$$
valitaan vain kerroin $= 100$. Siis
$$\underline{u(x,t) = 100 \sin\frac{\pi x}{80}\, e^{-\lambda_1^2 t}}$$
[Tällöin $u(x,0) = 100 \sin\frac{\pi x}{80} = \underline{f(x).}$]

Kuparilla $c^2 = 1.158$ (cm²/s)
$$\lambda_1^2 = \frac{c^2\pi^2}{80^2} = 0.001785$$

Keskipisteessä $x = 40$, $u(40,0) = 100$.

Määritetään $t_1$ s.e. $u(40, t_1) = 50$

$\Leftrightarrow \quad 100\, e^{-\lambda_1^2 t_1} = 50 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1^2 t_1 = \ln 2$

$\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{\ln 2}{\lambda_1^2} = \frac{\ln 2}{0.001785} = 388$ s. $\approx 6.5$ min.

**Esim 2** Sama kuin edellinen, mutta

(AE) $f(x) = u(x,0) = 100 \sin \frac{3\pi x}{80}$

Reunaehdoista seuraavat samat kanta-funktiot kuin edell. :

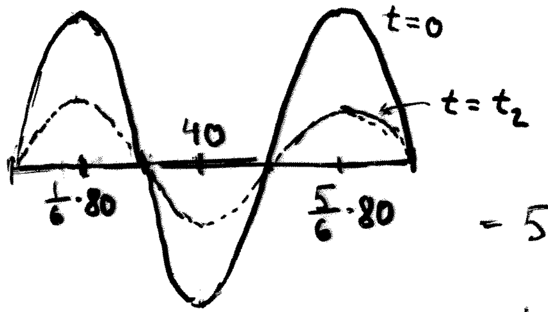
$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{80} e^{-\lambda_n^2 t},$$

$$\lambda_n = \frac{nc\pi}{80}$$

Tällä kertaa alkuehto toteutuu valitsemalla

$$u(x,t) = 100\, u_3(x,t)$$

$$= 100 \sin \frac{3\pi x}{80} e^{-\lambda_3^2 t}$$




Max-lämpötilan "puoliintumisaika":

$$-50 = u(40, t_2) = -100 e^{-\lambda_3^2 t_2}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda_3^2}$$

$$\lambda_3^2 = 3^2 \frac{c^2\pi^2}{L^2} = 9\lambda_1^2 \quad \Rightarrow t_2 = \frac{1}{9} t_1 = 43 \text{ s}$$

[ Jos $f(x)$ olisi $100 \sin \frac{5\pi x}{80}$, olisi puoliintumisaika $t_3 = \frac{1}{25} t_1$, jne. ]

**Huom!** Jos $f(x) = c_1 \sin \frac{k_1 \pi x}{80} + c_2 \sin \frac{k_2 \pi x}{80} + \dots + c_7 \sin \frac{k_7 \pi x}{80}$, saataisiin (AE) toteutumaan valitsemalla

$$u(x,t) = c_1 u_{k_1}(x,t) + c_2 u_{k_2}(x,t) + c_3 u_{k_3}(x,t),$$

missä $u_{k_j}(x,t) = \sin\frac{k_j \pi x}{L}\, e^{-\lambda_{k_j}^2 t}$.

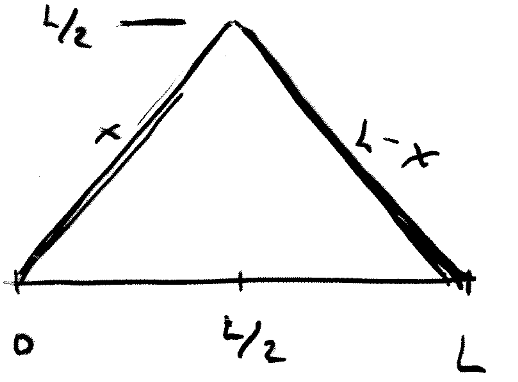
Ts. jos (AE)-funktio $f(x)$ on äärellinen lineaarikombinaatio funktioista $\sin\frac{k\pi x}{L}$, niin samoin kertoimin muodostettu lineaarikombinaatio funktioista

$$u_k(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{L}\, e^{-\lambda_k^2 t}$$

on tehtävän ratkaisu.

Siirryttäessä tätä erityistä muotoa olevasta (AE)-funktiosta yleiseen funktioon $f(x)$, astuu Fourier-sarja näyttämölle.

Esim 3




$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L-x, & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Äärellinen lineaarikombinaatio ei nyt riitä, vaan on etsittävä ratkaisua muodossa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t}$$

$$\left( \lambda_n = \frac{nc\pi}{L} \right)$$

Jotta $u(x,0) = f(x)$ (annettu funktio), on valittava $B_n$ = $f$:n $2L$-jaksoisen sinisarjan kerroin, ts.

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Tässä tehtävässä:

$$B_n = \frac{2}{L}\left( \int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L} (L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \right)$$

$$\left[ \text{Osittaisintegrointi: } \int_a^b f\,dg = \Big/_a^b fg - \int_a^b g\,df \right]$$

1. $$\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = -\frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2} x\,d\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left[ \Big/_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi x}{L} - \int_0^{L/2}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \right]$$

$$= \frac{L}{n\pi}\left[ \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{L}{2}\cos\frac{n\pi}{2} \right]$$

Vastaavasti:

2. $$\int_{L/2}^{L} (L-x) \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = -\frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L} (L-x)\, d\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \ldots = \frac{L}{n\pi}\left[\frac{L}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$B_n = \frac{2}{L}(\text{"1."} + \text{"2."}) = \frac{4L}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\frac{n\pi}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | … |

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{4L}{n^2\pi^2}, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\dfrac{4L}{n^2\pi^2}, & n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases}$$

($B_n = 0$, kun $n$ parill.)

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L} e^{-\lambda_1^2 t} + \right.$$
$$- \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{L} e^{-\lambda_3^2 t} + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{L} e^{-\lambda_5^2 t}$$
$$\left. - + \ldots \right]$$

Huom1! Sarjan termejä ei voi järjestää niin, että otetaan ensin + ja sitten − termit. (Tässä tapauksessa ainoa ongelmapaikka on $t = 0$.)

Huom2 Kun $t$ kasvaa, sarjan loppupää hyvin pieneksi. "Puoliintumisaika" –

Edellisten esimerkkien visualisointia ja käsittelyä symbolilaskentaohjelmalla (Maple):

http://math.tkk.fi/~apiola/Tampere2006/lampoyhtalo.html

(Linkki luento (L) - sivulta)

<u>Esim 4</u> ERISTETYT PÄÄT

(Adiabaattiset reunaehdot)

Lämpöä ei siirry myöskään sauvan päiden kautta, ts.

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0$$

Taas erotellaan muuttujat: $u(x,t) = F(x)G(t)$

Sijoitus lämpöyhtälöön ($u_t = c^2 u_{xx}$)

$$\Rightarrow \quad \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -p^2$$

[Jälleen on helppo nähdä, että $+p^2$ ei käy, paitsi tapaus $p = 0$ vaatii pienen pohdinnan.]

Ehkäpä aloitamme tällä pohdinnalla:

$$p = 0 \Rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow F(x) = ax + b$$

$F'(x) = a$.

RE:t $\Rightarrow$ $F'(0) = 0$, $F'(L) = 0$,
joten $a = 0$; $F(x) = b$.
Mutta nyt toinenkin RE toteutuu, koska $F'(x) = 0$ $\forall x$ (siis, kun $x = L$).
Tällöin myös $G'(t) = 0$, joten $G(t) \equiv$ vakio, joten (ominais)arvoa $p = 0$ vastaa ratkaisu

$$u_0(x,t) \equiv \text{vakio}$$

(Toteuttaa (LY):n ja RE:t.)

<u>Ol. $p > 0$</u>

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$
$$F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px$$

$0 = F'(0) = pB \Rightarrow B = 0$ $(p \neq 0)$
$0 = F'(L) = -pA\sin pL$
$$\Rightarrow pL = n\pi \;;\quad p = \frac{n\pi}{L}.$$

$$F_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Tässä otamme tapauksen $p = 0$ mukaan sallimalla arvon $n = 0$.

Kuten ennenkin, $G(t) = e^{-c^2p^2t}$,

merk. $\lambda_n = cp = \frac{n c \pi}{L}$.

Siis $u_n(x,t) = \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

tot. (LY):n ja (RE):t.

(AE): $u(x,0) = f(x)$.

Sama päättely kuin edellä:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}$$

tot. (LY):n ja 0-RE:t, missä $A_n$:t vapaasti valittavissa (kunhan sarja supp.)

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

$\parallel$ VAATIMUS

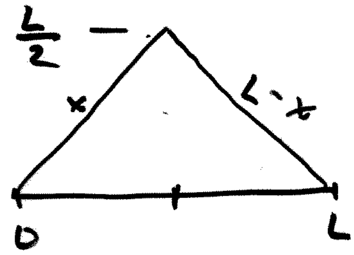
$f(x)$ TOTEUTUU VALITSEMALLA $A_n$:t $f(x)$:n kosini-sarjan kertoimiksi.

Siis

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_0^L f(x)\,dx \\ A_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \cos \dfrac{n\pi x}{L}\,dx \,, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

<u>Esim 5</u> Kolmiomainen alkulämpötila, eristetyt päät.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x, & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$




$$A_0 = \frac{1}{L} \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{L}{4}$$

$$A_n = \frac{2}{L} \left[ \int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx + \int_{L/2}^{L} (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L}\,dx \right]$$

Vastaavanlainen osittaisintegrointi kuin edellä

$$\Longrightarrow \quad A_n = \frac{2L}{n^2\pi^2} \left( 2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right), \quad n \geq 1$$

| $n$ | $2\cos\frac{n\pi}{2}$ | $\cos n\pi$ | $2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | −1 | 0 |
| 2 | −2 | 1 | −4 |
| 3 | 0 | −1 | 0 |
| 4 | 2 | 1 | 0 |

SAMA TOISTUU $\Longrightarrow$

0 −4 0 0 | 0 −4 0 0 | 0 −4 0 0 | . . .

$$u(x,t) = \frac{L}{4} - \frac{8L}{\pi^2}\Big[ \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L}\, e^{-\left(\frac{2c\pi}{L}\right)^2 t} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{L}\, e^{-\left(\frac{6c\pi}{L}\right)^2 t} + \dots \Big]$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{8L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k-2}\cos\frac{(4k-2)x}{L}\, e^{-(\dots)t},$$

missä $(\dots) = \left(\frac{(4k-2)c\pi}{L}\right)^2$.

Katsele visualisointeja em. viitteestä. Näet mm., että derivaatta $x$:n suhteen on todella 0 reunoilla. Myös tasapainolämpötila:

$u_\infty(x,t) = \frac{L}{4}$ näkyy selvästi.

$(\lim_{t\to\infty} u(x,t))$

Kun lämpöä ei virtaa sisään eikä ulos, se vain tasaantuu sauvan (lämpötila) sisällä ja lähestyy (mopeasti) ajasta riippumatonta vakiolämpötilaa $\frac{L}{4}$.