

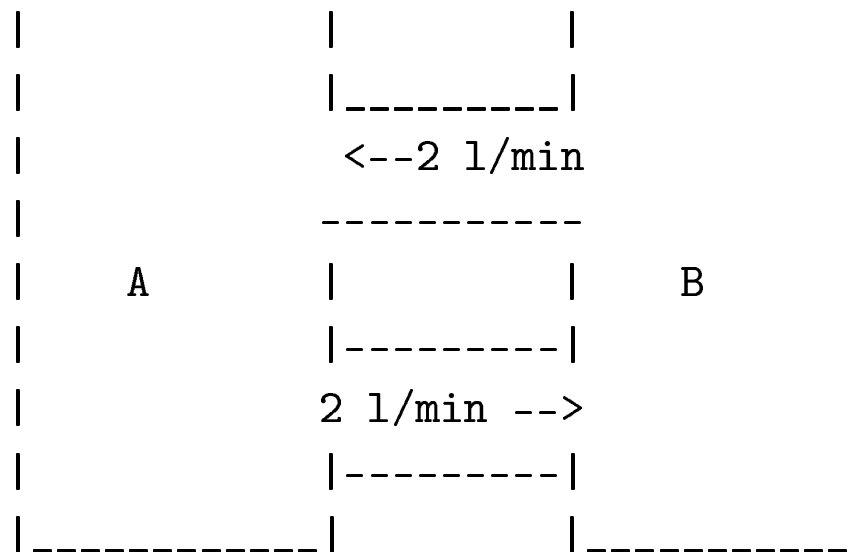
1 Johdantoesimerkki

Seostehtävä:

Säiliö A: alkuhetkellä 100l vettä.

Säiliö B: alkuhetkellä 100l vettä, johon sekoitettu 1.5 kg suolaa .

Täydellinen sekoitus. Määritä suolamäärät $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ säiliöissä A ja B hetkellä t .



Ratkaisu:

Suolapitoisuudet säiliöissä hetkellä t : $\frac{y_1(t)}{100}$ kg/l ja $\frac{y_2(t)}{100}$ kg/l.

Suolamäärän muutosnopeus säiliössä = (sisäänvirtaus) – (ulosvirtaus).

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2\frac{y_2(t)}{100} - 2\frac{y_1(t)}{100} = -0.02 y_1(t) + 0.02 y_2(t) \\ y_2'(t) = 2\frac{y_1(t)}{100} - 2\frac{y_2(t)}{100} = 0.02 y_1(t) - 0.02 y_2(t) \end{cases}$$

Matriisimuodossa: $\mathbf{y}' = A \mathbf{y}(t)$, missä $A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$

Yrite: $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{x}$, missä \mathbf{x} on vakiovektori. (Muista 2. kertaluvun vakiokert.

diffyhtälöitä: Sijoitettiin yrite: $y = C e^{\lambda t}$ ja pyrittiin määräämään parametri λ .)

Nyt on määrättäviä parametreja λ :n lisäksi vektorin \mathbf{x} koordinaatit x_1, x_2 .

Sijoitetaan yhtälöön: $\mathbf{y}(t)$ ja $\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{x} \implies$

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{x} = e^{\lambda t} A \mathbf{x} \quad \forall t.$$

Tämä toteutuu $\iff A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$.

Siispä johduimme ominaisarvot tehtävään.

Muotoa

$$\mathbf{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2$$

olevat vektorifunktiot ovat ratkaisuja, kun λ_j on ominaisarvo ja \mathbf{x}_j vastaava ominaisvektori, $j = 1, 2$.

Lasketaan (luennolla tarkemmin) : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.04$.

$$\text{Ominaisvektorit: } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

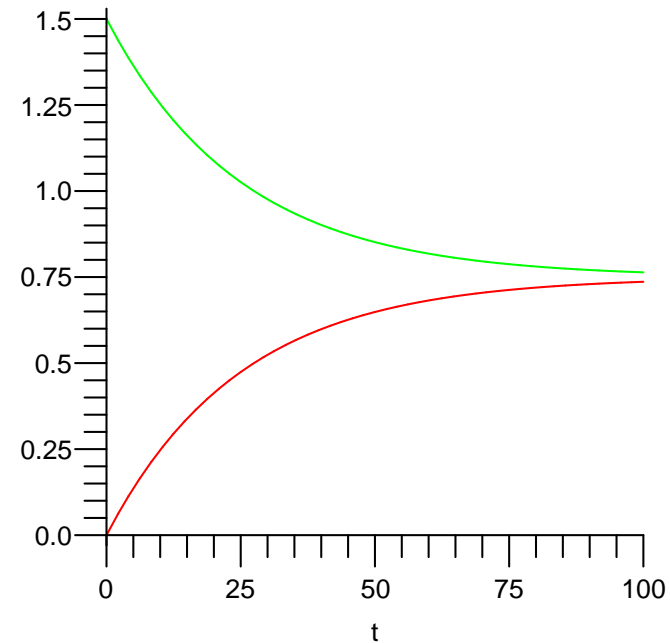
$$\text{Alkuehdot: } \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = C_1 \mathbf{x}_1 + C_2 \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Saadaan heti: $C_1 = 0.75, C_2 = -0.75$.

$$\text{Ratkaisu: } \mathbf{y}(t) = 0.75 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.75 e^{-0.04t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Koordinaattifunktiomuodossa:

$$\begin{cases} y_1(t) = 0.75(1 - e^{-0.04t}) \\ y_2(t) = 0.75(1 + e^{-0.04t}) \end{cases}$$



Onko tämä ratkaisutekniikka yleispätevä? Sitäpä nyt selvittelemään!

2 Vektori/matriisifunktioita, LRT/LRV

Matriisi- ja vektorifunktioita

Reaalimuuttujan t vektoriarvoinen funktio $t \mapsto \mathbf{v}(t)$.

Reaalimuuttujan t matriisiarvoinen funktio $t \mapsto A(t)$.

(Edellinen on erikoistapaus jälkimmäisestä.)

Derivaatta ja integraali ym. tarkoittavat *alkioittaisia* operaatioita.

Esimerkki 2.1 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 1 & -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad A'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) & 0 \\ 0 & -\cos(t) \end{bmatrix}$$

Lause 2.1 *Summan ja tulon derivoimiskaavat pätevät:*

$$\frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = A'(t) + B'(t), \quad \frac{d}{dt}(A(t) B(t)) = A'(t) B(t) + A(t) B'(t).$$

Tod: *Seuraavat suoraan vastaavista skalaarifunktioiden kaavoista. Katsotaan kuitenkin jälkimmäinen: Olkoon $C(t) = A(t) B(t)$*

$$c_{ij}(t) = (A(t) B(t))_{ij} = \sum_k a_{ik}(t) b_{kj}(t).$$

Sovelletaan summan derivoimiskaavaa ja kussakin yhteenlaskettavassa tulon kaavaa. Siispä $c'_{ij}(t) = \text{---}$

□

Huom! Vaikka matriisit olisivat neliömatriiseja (siis kertomiskelpoisia myös toisinpäin), **ei saa vaihtaa** tulontekijöiden järjestystä!

Funktioiden LRT/LRV

Jos on opiskeltu abstraktia lineaarialgebraa, ei näitä tarvitse erikseen määritellä. Meillä ei näin tehty, joten

Määritelmä 2.1 *Vektorifunktiot $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ovat LRT välillä $I = (a, b)$, jos*
$$c_1 \mathbf{v}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{v}_n(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad \implies \quad c_1 = \dots = c_n = 0.$$

(Tämä on sopusoinnussa yleisen LRT- määritelmän kanssa, koska kaksi funktiota ovat samoja määrittelyvälillään I , jos ne yhtyvät kaikissa pisteissä $t \in I$.)

Lemma 2.2 (LRT-lemma 1) *Olko vektorifunktiot muotoa $\mathbf{x}_j(t) = f_j(t) \mathbf{v}_j$, missä f_j :t skalaarifunktioita ja \mathbf{v}_j :t vakiovektoreita.*

Jos kullakin f_j :llä on vain äärellinen määrä nollakohtia välillä I , niin funktiot $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ ovat LRT, mikäli vakiovektorit $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ovat LRT.

Tod: Koska väli I on ääretön ja nollakohtia on yhteensä vain äärellinen määrä, voidaan valita (jopa äärettömällä valinnanvapaudella) piste $t_0 \in I$, jossa $f_j(t_0) \neq 0 \quad \forall j = 1 \dots n$. Jos nyt

$$c_1 f_1(t) \mathbf{v}_1 + \dots + c_n f_n(t) \mathbf{v}_n = 0 \quad \forall t \in I,$$

niin erityisesti

$$c_1 f_1(t_0) \mathbf{v}_1 + \dots + c_n f_n(t_0) \mathbf{v}_n = 0$$

Koska \mathbf{v}_j :t LRT ja jokainen $f_j(t_0) \neq 0$, on oltava $c_1 = \dots = c_n = 0$. □

Huom: Tätä lemmaa sovelletaan usein tilanteessa, jossa $f_j(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Lemma 2.3 (LRT-lemma 2) Vektorifunktiot $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ ovat LRT välillä I , jos vektorit $\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$ ovat LRT vektoreita jossain välin pisteessä $t_0 \in I$.

Tod: Tämä on ihan oikeasti triviaali:

Jos $c_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$, niin tokihan tuo yhtälö pätee erityisesti, kun sijoitetaan $t = t_0$. Siispä oletuksen mukaan $c_1 = \dots = c_n = 0$. □

Huomautus 2.1 *Näillä pärjätään oikein hyvin. Emme tarvitse misään käsitettä Wronskin determinantti, jota kirjallisuudessa tällä kohdalla kovin innokkaasti tarjoillaan. Toki siihen vetoaminen ei ole kiellettyä.*

Tavallisesti jälkimmäisessä muodossa otetaan $t_0 = 0$, joka tulee luontevasti käyttöön, kun käytetään alkuehtoja. (Jos nollassa lasketut vektorit eivät olisi LRT, ei alkuehtoja voitaisi aina toteuttaa.)

3 Perusteoriaa

Kts. KRE 3.2. s. 159 alk.

Diffyhtälösystemi:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Vektorimuodossa: $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Alkuarvoprobleema: Diffyhtälö ja ehdot: $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v}$. (annettu vektori)

Lineaarinen systeemi:

$$\mathbf{y}' = A(t) \mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \quad (\text{EHY}) \quad (\text{epähomog.})$$

$$\mathbf{y}' = A(t) \mathbf{y} \quad (\text{HY}) \quad (\text{homog.})$$

Ratkaisun olemassaololause yleisille on luonteeltaan lokaali. Tässä otetaan vain lineaaristen systeemien lause, joka on muotoilultaan yksinkertainen ja johtopäätökseltään globaali, ts. johtopäätös pätee samalla (isolla) välillä kuin oletuskin.

Lause 3.1 *Jos $a_{ij}(t)$ -funktiot ja $\mathbf{g}(t)$ ovat jatkuvia välillä $I = (a, b)$, niin lineaarisen systeemin alkuarvotetävällä*

$$\mathbf{y}' = A(t) \mathbf{y} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \text{ on annettu vektori}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu koko välillä I .

Lause 3.2 *Jos funktiot $\mathbf{y}_1(t)$ ja $\mathbf{y}_2(t)$ toteuttavat (HY):n, niin niiden lineaarikombinaatio toteuttaa myös, ts. $\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{y}_1(t) + c_2 \mathbf{y}_2(t)$ toteuttaa myös. (LA:n kielellä: ratkaisujoukko on aliavaruus)*

Tod. *Olkoot \mathbf{y}_1 ja \mathbf{y}_2 (HY):n ratkaisuja.*

$$\mathbf{y}'(t) = c_1 \mathbf{y}'_1(t) + c_2 \mathbf{y}'_2(t) = c_1 A \mathbf{y}_1(t) + c_2 A \mathbf{y}_2(t) = A(c_1 \mathbf{y}_1(t) + c_2 \mathbf{y}_2(t)) = A \mathbf{y}(t).$$

Siinäpä se.

□

Kaiken perusta on tämä:

Lause 3.3 *Jos vektorifunktiot $\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t)$ ovat (HY):n LRT ratkaisuja, niin jokainen ratkaisu $\mathbf{y}(t)$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa:*

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{y}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(t)$$

(LA:n kielellä: ratkaisuavaruuden dimensio = n)

Tod: *Saadaan olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseesta 3.1. Todistus on oikein nautittava, mutta jätämme sen kuitenkin tällä kertaa. Periaate ... (täydennän kun/jos ehdin)*



(HY):n yleinen ratkaisu:

Ratkaisuparvea $\mathbf{y}_h(t) = c_1 \mathbf{y}_1(t) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(t)$ sanotaan (HY):n yleiseksi ratkaisuksi, se siis sisältää kaikki (HY):n ratkaisut.

Perusmatriisi, Wronskin determinantti:

$$Y(t) = [\mathbf{y}_1(t) \quad \mathbf{y}_2(t) \quad \dots \quad \mathbf{y}_n(t)],$$

missä $\mathbf{y}_j(t)$:t LRT.

$$W(t) = \det(Y(t)),$$

myös vaikka ratkaisut eivät olisi LRT. Jos $W(t) \neq 0$, niin LRT ja siis perusmatriisi. Kuten sanottu, pärjäämme oikein hyvin LRT-lemmoilla tarvitsematta edes tuntea käsitettä "Wronski". Toisaalta sitä saa toki käyttää. Siihen liittyvä "ihme" on, että $W(t) = 0 \quad \forall t \in I \iff W(t) = 0$ jollain $t \in I$.

4 Vakiokertoimiset homogeeniyhtälöt, faasitaso

$$\mathbf{y}' = A \mathbf{y} \quad (HY)$$

Aivan kuin edellä johdantoesimerkissä, sijoitetaan yrite $\mathbf{y} = e^{\lambda t} \mathbf{x} \implies \lambda e^{\lambda t} \mathbf{x} = e^{\lambda t} A \mathbf{x} \quad \forall t \in I$.

Johdutaan ominaisarvot tehtävään: $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. Sen ratkaisuuina saatavien $(\mathbf{x}_j, \lambda_j)$ avulla saadaan ratkaisut

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_j t} \mathbf{x}_j.$$

Kaikki on helppoa, jos on n kpl. LRT ominaisvektoreita.
Tällöin LRT-lemma (kumpi vain) kertoo heti, että funktiot
 $\mathbf{y}_k(t) = e^{\lambda_k t} \mathbf{x}_k$ ovat LRT.

Päälauseen 3.3 mukaan kaikki ratkaisut saadaan parvesta:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{x}_n$$

Lause 4.1 *(EHY):n yleinen ratkaisu saadaan lisäämällä (HY):n yleiseen ratkaisuun jokin (EHY):n erityisratkaisu. Ts. jos $\mathbf{y}_h = c_1 \mathbf{y}_1 + \dots + c_n \mathbf{y}_n$ ja jos \mathbf{y}_p on jokin (EHY):n ratkaisu, niin $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$ on (EHY):n yleinen ratkaisu, eli sisältää kaikki ratkaisut.*

Tod. 1. *Toteuttaa, sillä olkoon $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$. Nyt*

$\mathbf{y}' = \mathbf{y}'_h + \mathbf{y}'_p = A \mathbf{y}_h + A \mathbf{y}_p + \mathbf{g} = A(\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p) + \mathbf{g} = A \mathbf{y} + \mathbf{g}$,
joten \mathbf{y} toteuttaa kuin toteuttaakin (EHY):n.

2. Olkoonpa nyt \mathbf{z} mielivaltainen (EHY):n ratkaisu. osoitetaan, että se on yllä olevaa muotoa $\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$.

Eipä muuta kuin todetaan, että $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ on (HY):n ratkaisu, mikä näkyy heti:

$$(\mathbf{z} - \mathbf{y})' = \mathbf{z}' - \mathbf{y}'_p - \mathbf{y}'_h = (A\mathbf{z} + \mathbf{g}) - (A\mathbf{y}_p + \mathbf{g}) - A\mathbf{y}_h = A(\mathbf{z} - \mathbf{y})$$

Niinpä $\mathbf{z} - \mathbf{y} = \mathbf{y}_H$ on (HY):n ratkaisu, joten $\mathbf{z} = \mathbf{y}_p + \underbrace{\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_H}_{\text{(HY):n ratkaisu}}$.

2x2-systeemejä, faasitasoja

Katsotaan ensin, mikä on "aikatason" ja faasitason suhde. Merkitään havainnollisuuden vuoksi faasitason pisteitä $(x(t), y(t))$. Diffyhtälön $y'' + y = 0$ ratkaisuja ovat $y_1 = \sin t$ ja $y_2 = \cos t$. Katsotaan yhtälöä systeeminä, siispä:

Muunnetaan systeemiksi:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' = y'_1, \text{ siis: } \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = -y_1 \end{cases}$$

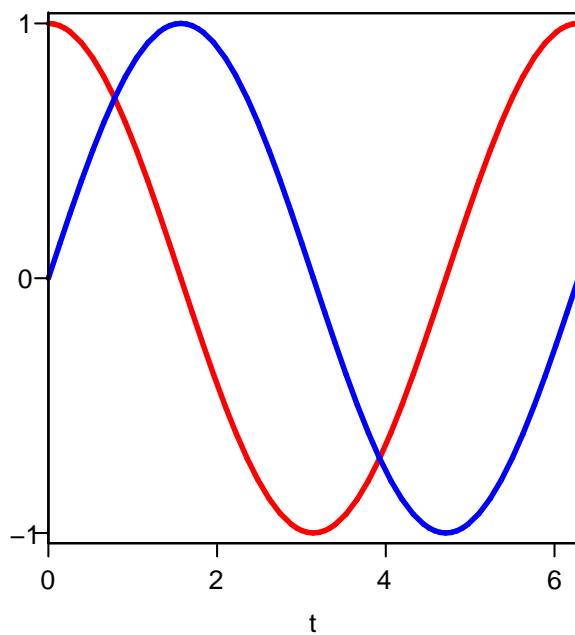
Matriisimuodossa $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, missä $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Haetaan nyt vain jokin ratkaisu, vaikkapa sellainen, joka toteuttaa alkuehdon

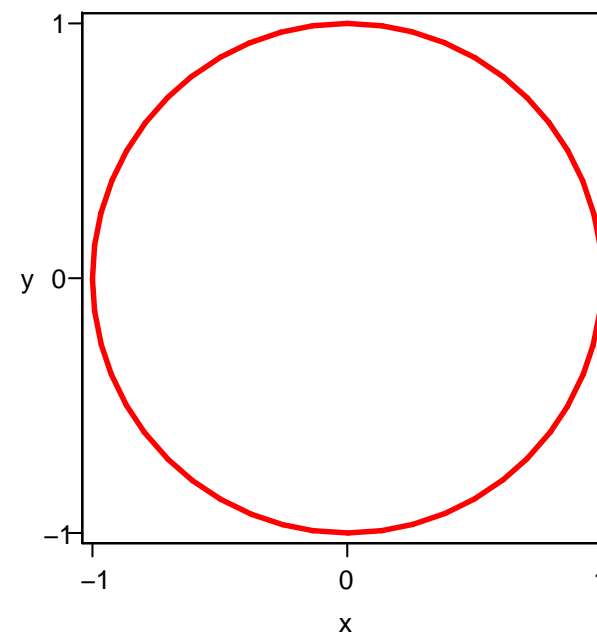
$\mathbf{y}(0) = [0, 1]^T$. Ratkaisuksi nähdään heti: $y_1 = \sin(t)$, $y_2 = \cos(t)$, ts.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

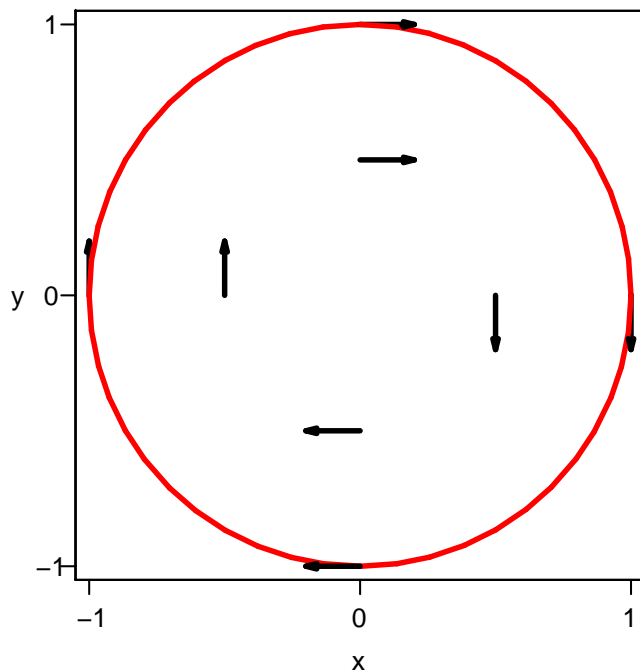
Aikakuva



Faasikuva



Faasikuva ja 8 suuntakenttänuolta



```
> A=[0 1;-1 0]
```

```
A =
```

```
0 1
```

```
-1 0
```

```
> ykspisteet=[0 1 0 -1;1 0 -1 0]
```

```
ykspisteet =
```

```
0 1 0 -1
```

```
1 0 -1 0
```

```
> A*ykspisteet
```

```
ans =
```

```
1 0 -1 0
```

```
0 -1 0 1
```

2×2 -systemien faasitasotyypit

Noodi (lähde)

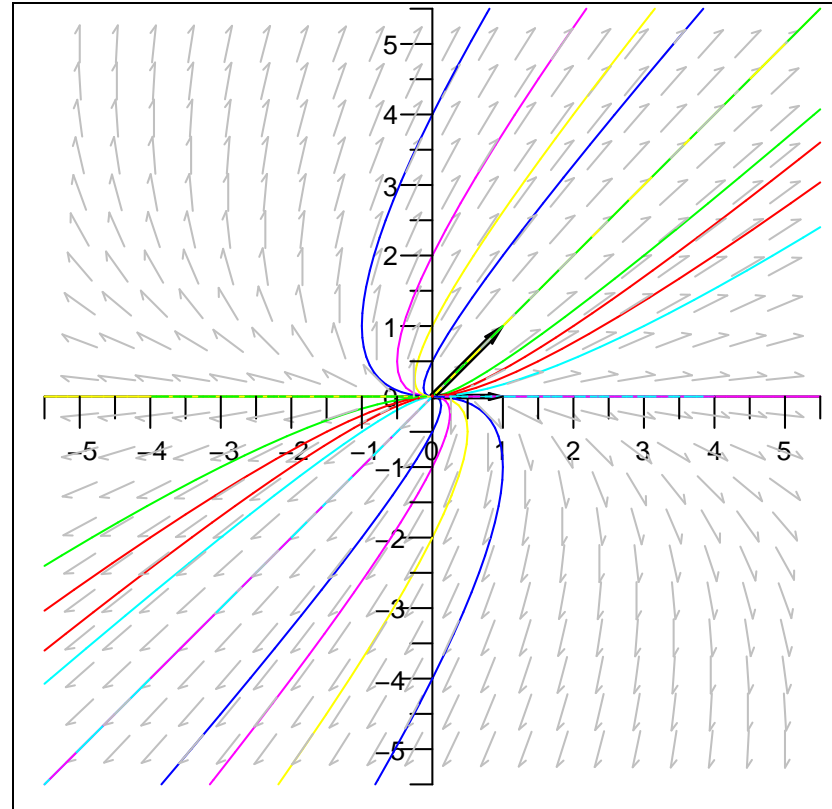
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{v}_1 = [1, 0]^T$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \mathbf{v}_2 = [1, 1]^T$$

Molemmat ominaisarvot > 0 .



Epästabiili: Trajektorit pakenevat pois päin O:sta ja lähenevät ääretöntä kaikista lähtöpisteistä $\mathbf{x}_0 \neq 0$.

Edellisen yksityiskohdat

Yleinen ratk: $\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$.

Ominaisvektorit \mathbf{v}_1 ja \mathbf{v}_2 LRT, joten tässä on kaikki ratkaisut.

Jos "kerrotaan auki", saadaan koordinaattifunktiomuoto:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

Tästä voidaan piirtää ratkaisukäyrien (trajektorien) pisteitä kiinnittämällä c_1 ja c_2 ja antamalla arvoja käyräparametrina esiintyvälle t :lle.

Ratkaisujen luonne näkyy parhaiten, kun asettuu katsomaan tilannetta ominaisvektorikantaan, jolloin katsotaan ratkaisua muodossa.

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{z_1(t)} \mathbf{v}_1 + \underbrace{c_2 e^{\lambda_2 t}}_{z_2(t)} \mathbf{v}_2.$$

Merkitään koordinaattifunktioita ominaisvektorikannan suhteen $z_1(t)$ ja $z_2(t)$.

Huomaa, että (c_1, c_2) tarkoittaa alkupisteen koordinaatteja

ominaisvektorikannassa.

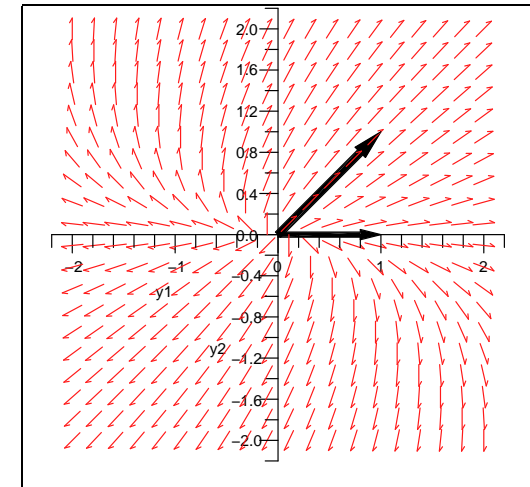
1. Alkupiste ominaisvektorilla: $c_2 = 0 \implies$
ollaan (ja pystään) \mathbf{v}_1 :llä.

$c_1 = 0 \implies$ pysytään \mathbf{v}_2 :lla.

Ratkaisupiste pysyy ominaisvektorilla, etäisyys O:sta

$|c_1|e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow \infty$, koska $\lambda_1 > 0$.

Aivan samoin \mathbf{v}_2 ja λ_2 .



2. Alkupiste ei kummallakaan ominaisvektorilla: $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

$$z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Tämän esimerkin tapauksessa $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, jolloin $z_2 = K z_1^2$, missä $K = \frac{c_2}{c_1^2}$.

Ominaisvektorikannassa kyse on siis paraabeliparvesta. Tarkkaan ottaen kukin trajektorio on paraabelin haara, joka lähestyy O:a, kun $t \rightarrow -\infty$ ja lähestyy ääretöntä, kun $t \rightarrow \infty$.

Miten ominaisarvot vaikuttavat trajektorien muotoon?

Mitä, jos edellä olisi ollut $\lambda_2 = 3 \lambda_1$?

No silloin olisi saatu kuutioparaabeleja: $z_2 = K z_1^3$.

Yleisesti: Jos $\lambda_2 = p \lambda_1$, saadaan käyriä:

$z_2 = K z_1^p$, missä p voi yleisesti olla kokonaisluvun lisäksi mikä tahansa positiivinen reaaliluku.

Mitä, jos $\lambda_1 = \lambda_2$? Siitä harjtehtävä AV:lla (tapauksessa: 2 LRT ominaisvekt.)

Muut reaaliset ominaisarvoyhdistelmät

1. Jos $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, niin edellisessä ei muutu mikään muu kuin nuolien suunta. Kaikki virtaa O:oon päin.
2. Reaaliset ja erimerkkiset. Jos $\lambda_2 = -p \lambda_1$, saadaan

$$z_2 = \frac{K}{z_1^p},$$

jolloin trajektorit ovat "hyperbelinomaisia".

Toista ominaisvektoria ($\lambda > 0$ pitkin kuljetaan pois päin O:sta ja toista ($\lambda < 0$) origoon päin.

Noodi (nielu)

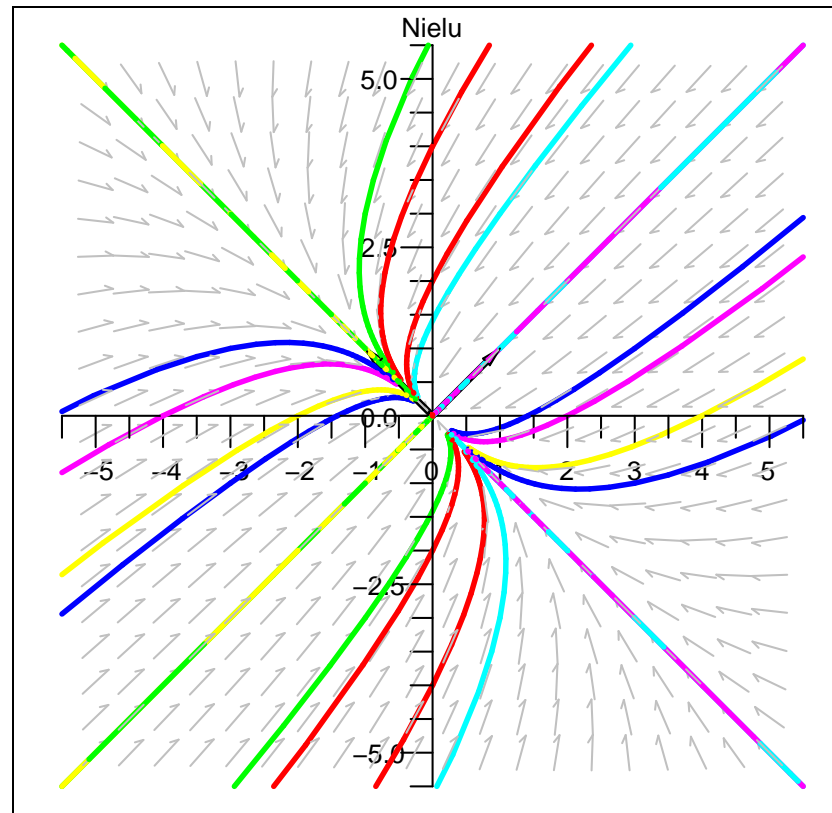
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$$\lambda_1 = -1, \quad \mathbf{v}_1 = [-1, 1]^T$$

$$\lambda_2 = -3, \quad \mathbf{v}_2 = [1, 1]^T$$

Molemmat ominaisarvot < 0 .



Stabiili (vahvasti): Trajektorit virtaavat kohti O:a.

kaikista lähtöpisteistä $\mathbf{x}_0 \neq 0$.

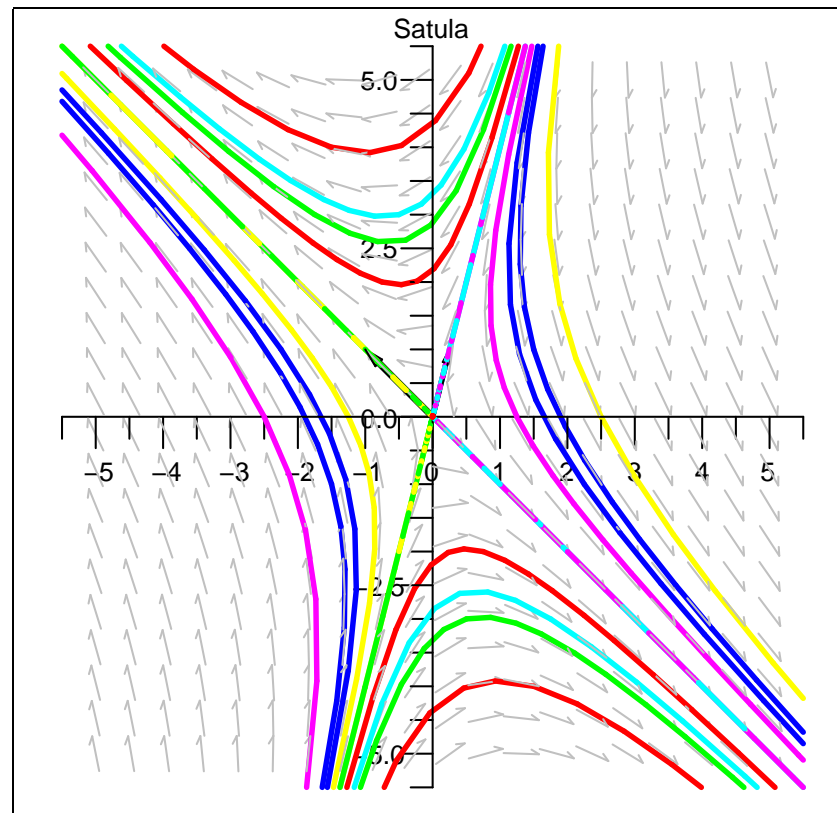
Satula

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$$\lambda_1 = -2, \quad \mathbf{v}_1 = [4, 1]^T$$

$$\lambda_2 = 3, \quad \mathbf{v}_2 = [-1, 1]^T$$



Epästabiili: Osa trajektoreista $\rightarrow \infty$, lähdettiinpä miten läheltä O:a tahansa (erit. posit. ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin pisteistä).

Spiraali (lähde tai nielu)

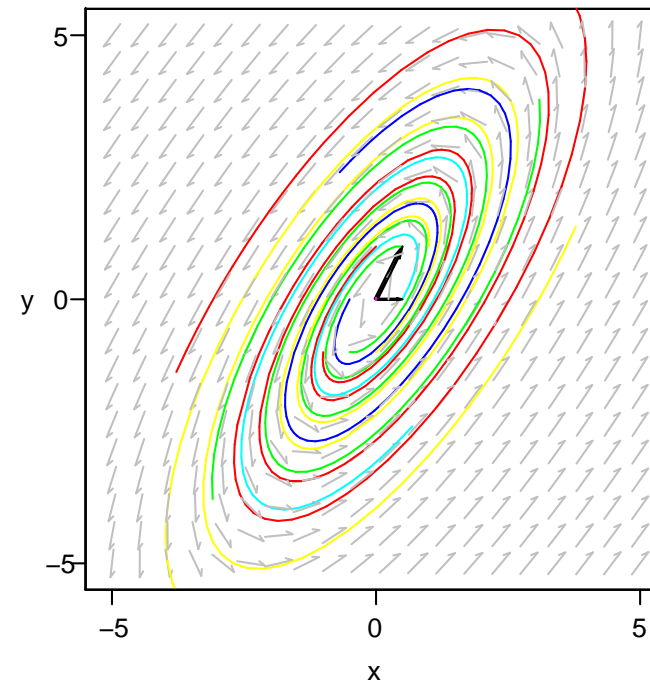
$$A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 16 & -7 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$$\lambda_1 = 1 + 8i, \quad \mathbf{v}_1 = [1 + i, 2]^T$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \quad \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$$

$$\operatorname{Re}\lambda_1 (= \operatorname{Re}\lambda_2) > 0$$



Epästabiili: Kaikki trajektorit kiertävät laajenevaa spiraalia $\rightarrow \infty$, lähdettiinpä miten läheltä O:a tahansa

Jos olisi $\operatorname{Re}\lambda_1 (= \operatorname{Re}\lambda_2) < 0$, niin ____

Yleinen ratk:

$$\text{Merk. } \mathbf{w} = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u} = \operatorname{Re} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \operatorname{Im} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \lambda_1.$$

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{w} + c_2 e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{w}} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(8t) & \sin(8t) \\ -\sin(8t) & \cos(8t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Voidaan kirjoittaa myös muotoon:

$$\mathbf{y}(t) = e^t \left(c_1 \begin{bmatrix} \cos(8t) - \sin(8t) \\ 2 \cos(8t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(8t) + \cos(8t) \\ 2 \sin(8t) \end{bmatrix} \right)$$

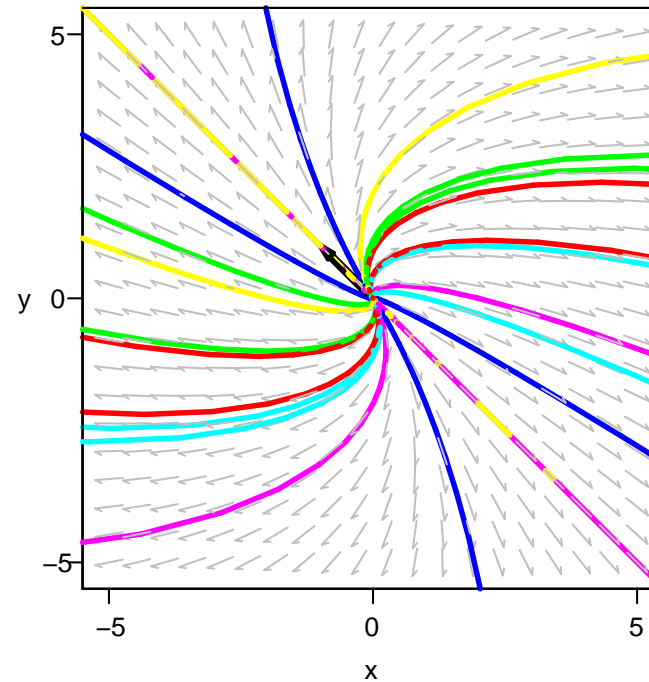
Degeneroitunut lähde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3, \quad \mathbf{v} = [-1, 1]^T$$

Vain 1-dim ominaisavaruus.



Epästabiili: Kaikki trajektorit $\rightarrow \infty$ Jos olisi $\lambda < 0$, niin _ _ _ _