Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Häme

Tentti 31.3.2007

Funktiolaskin sallittu

1. Selvitä *Gauss–Jordanin* algoritmilla matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

kääntyvyys ja myönteisessä tapauksessa määritä A^{-1}.

Huom: Cramerin sääntö tai muu "keksiminen" ei johda edes lohdutuspisteeseen.

2. Määritä c matriisissa $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & c & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ niin, että matriisi A on diagonalisoituva.

3. Muodosta systeemin $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ yleinen ratkaisu, kun

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix},$$

ja ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}(0) = [1, 3]^T$.

Piirrä faasikuva, jossa on ominaissuorat suuntanuolineen, edellä olevan alkuarvotehtävän ratkaisutrajektorin hahmotelma suuntanuolin sekä muutama muu trajektori ylimalkaisesti hahmoteltuna. Piirrä myös yksikköpisteisiin $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ liittyvät (lyhyet) suuntakenttänuolet (suoraan yhtälöstä laskettuna).
Mikä on O :n tyyppi ja stabiilisuus?

4. Mallinnetaan jänis-kettu-yhteiseloa yhtälöparilla:

$$\begin{cases} x' = 200\,x - 4\,x\,y \\ y' = -150\,y + 2\,x\,y. \end{cases},$$

missä $x(t)$ on jänisten ja $y(t)$ kettujen lukumäärä ajanhetkellä t.

Määritä systeemin kriittiset pisteet ja linearisoi siinä, jossa kumpikin populaatio säilyy hengissä. Määritä linearisoidun systeemin luonne ominaisarvojen perusteella. (Ominaisvektoreita ei tarvitse laskea.)

5. Sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan, pituus $L = 10$, päät pidetään 0°C:ssa. Sauvan alkulämpötila noudattaa funktiota

$$f(x) = \begin{cases} 100, & 0 < x < 5 \\ 0, & 5 < x < 10. \end{cases}$$

Määritä sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$.

Kirjoita erikseen näkyviin ratkaisusarjan 3:n ensimmäisen termin summa.

Kaavoja, ohjeita

Fourier-kertoimet, f määritelty välillä $(-L, L)$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}), \quad \text{missä}$$

$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx$,
$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Lämpö/diffuusioyhtälö (1-ulotteinen): $u_t = c^2\, u_{xx}$

Lämpöyhtälön ratkaisu, kun sauvan pituus L, reunat $0°$:ssa ja alkuehtona $u(x, 0) = f(x)$:
Ratkaisu: $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\,\pi\,x}{L} e^{-\lambda_n^2\, t}$, $\lambda_n = \frac{c\,n\,\pi}{L}$, missä kertoimet B_n määrätään niin, että alkuehto toteutuu.