Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Häme

Tentti 19.12.2006

Funktiolaskin sallittu

1. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

nolla-avaruuden *Nul(A)*, sarakeavaruuden *Col(A)* ja riviavaruuden *Row(A)* kannat. Esitä käsitteiden *rangi* ja *nulliteeti* määritelmät ja totea, että laskusi tukee niiden välillä vallitsevaa yhteyttä.

2. (a) Oletetaan, että $n \times n-$ matriisi A on diagonalisoituva. Kirjoita A:n diagonalisointiesitys selostaen, miten ko. matrisiit muodostetaan.

(b) Esitä perustellen, miten voidaan vähäisellä määrällä aritmeettisia operaatioita laskea A^p, kun A on diagonalisoituva.

(c) Laske A^{15}, kun $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$ (Viiden numeron tarkkuus riittää.)

Vihje: Käänteismatriisi $2 \times 2-$ matriisille saadaan helpoimmin näin: 1) vaihdetaan päälävistäjän alkiot keskenään, 2) ”miinustetaan” sivulävistäjän alkiot, 3) jaetaan determinantilla.

3. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = [0,1]^T$, kun

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Selvitä kriittisen pisteen **0** luonne (noodi, satula, spiraali, tms.) ja stabiilisuus, sekä piirrä kuvaan ominaisvektorit ja edellä saatu ratkaisutrajektori suuntanuolineen. (Siis suuntanuolet myös ominaisvektoreille.)

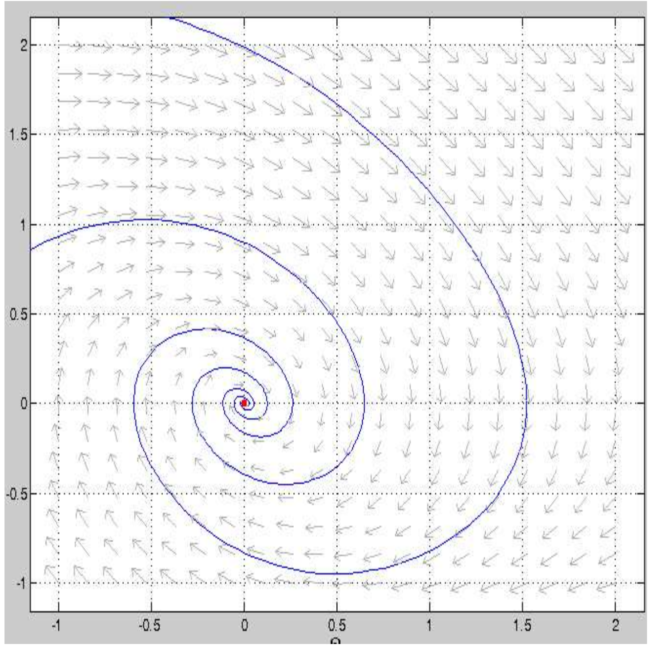
Vihje: Trajektorin hahmottelemiseen riittää laskea pari arvoa niiden lisäksi, jotka tiedät muutenkin. Sopivia t :n arvoja voisivat olla ainakin yksi $t_1 \in (-1,0)$ ja toinen $t_2 \in (0,2)$. Käyrän muoto selviää parhaiten asettumalla ominaisvektorikoordinaatistoon, mutta se olkoon ”vapaaehtoista”.

4. Tarkastelun kohteena on vaimennettua heiluria kuvaava yhtälö

$$\Theta'' + c\,\Theta' + k \sin \Theta = 0,$$

missä vakioilla on arvot $k = 1, \quad c = 0.5$. Kuvassa näkyy suuntakenttä ja mm. pisteen $(0,2)$ kautta kulkeva trajektori (alkupoikkeutus $= 0$, alkukulmanopeus $= 2$(rad/s)).

(a) Kirjoita yhtälö 1. kertaluvun systeemiksi ja määritä kriittiset pisteet.
(b) Linearisoi systeemi kriittisen pisteen **0** ympäristössä (toivottavasti sait edellä ainakin sen), ja päättele ominaisarvojen perusteella, että tyyppi on sopusoinnussa kuvan kanssa. (Ominaisvektoreita saati ratkaisun yleistä muotoa ei tarvitse laskea.)
(c) Suorita kolme Eulerin menetelmän askelta lähtien ajanhetkellä $t = 0$ pisteestä $(0,2)$ käyttäen (aika-)askelpituutta $h = 0.5$. Piirrä pisteet ja niitä yhdistävä murtoviiva faasitasoon.



Käännä!

5. Sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan ($c = 1$) pituus olkoon $L = 5$ cm. Alkuhetkellä $t = 0$ sauvalla on vakiolämpötila $f(x) = 20°\text{C}, \quad 0 < x < 5$, ja sen päät sijoitetaan jääveteen, 0°C.

   (a) Määritä sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$.

   (b) Kuinka pitkän ajan kuluttua sauvan keskipisteen lämpötila on 5°C? Riittää käyttää approksimaationa sarjan ensimmäistä termiä.

Kaavoja, ohjeita

Kaikkia kaavoja sinun ei tarvitse tarvita.

Fourier-kertoimet, f määritelty välillä $(-L, L)$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}), \quad \text{missä}$$

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$,
$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \in \mathbb{N}$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Lämpö/diffuusioyhtälö (1-ulotteinen): $u_t = c^2\, u_{xx}$

Lämpöyhtälön ratkaisu, kun sauvan pituus L, reunat $0°$:ssa ja alkuehtona $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\,\pi\,x}{L} e^{-\lambda_n^2\,t}, \quad \lambda_n = \frac{c\,n\,\pi}{L},$$

missä kertoimet B_n määrätään niin, että alkuehto toteutuu.

Palautteita on palauteltu tähän mennessä (ma 18.12. klo 22) 53 kpl. Muistakaa, että **aikaa on vielä** ke-puoleenyöhön saakka!

Joissakin vastauksissa osoitettiin kiinnostusta matemaattisiin ohjelmistoihin. Muistutan, että niitä opetetaan keväällä kurssilla Mat-1.3654, kts. `http://math.tkk.fi/opetus/numsym/`, jota ensi keväänä pitää *Teijo Arponen*, kysy tarkemmin: `teijo.arponen@tkk.fi`

Toivotan hyvää koemenestystä , joulua ja uutta vuotta sekä matematiikan peruskurssien jälkeistä elämää.

HEIKKI