Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Häme

Tentti 3.2.2007, ratkaisuja

Osa ratkaisuista: helmi07ratk.html (myös .mws)

1. (a) Lausu b_2 :n ja b_3 :n avulla ehto, jolla yhtälösysteemillä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on ratkaisuja.

   Vast:

$$b_3 + 1 - 1/2\, b_2 = 0$$

   Yksityiskohdat: `helmi07ratk.html`.

   (b) Määritä yllä olevalla ehdolla kaikki yhtälösysteemin ratkaisut, kun $b_3 = -2$.

$$\begin{bmatrix} x_1 = -\frac{13}{7}\, t + 4/7 \\ x_2 = -5/7\, t + 1/7 \\ x_3 = t \end{bmatrix}$$

   Yksityiskohdat: `helmi07ratk.html`.

2. Olkoon P $(n \times n)$ stokastinen matriisi.

   (a) Osoita, että 1 on P :n ominaisarvo.

   Tod: Tiedetään (ja muistetaan), että matriisin ja sen transpoosin ominaisarvot ovat samat. Vitsi on siinä, että transpoosin rivisummat $= 1$.

   Olkoon siis $Q = P^T$. Jos Q :lla kerrotaan ykkösistä koostuva vektori, niin silloinhan saadaan tulokseksi samainen ykkösistä koostuva vektori. Kaavan muodossa näin $(n = 3)$:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{bmatrix}$$

   Olkoon $\boldsymbol{u} = [1, 1, 1]^T$. Nytpä:

$$Q\,\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{1,1} + q_{1,2} + q_{1,3} \\ q_{2,1} + q_{2,2} + q_{2,3} \\ q_{3,1} + q_{3,2} + q_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{u}$$

Alussa todetun mukaan siis $\lambda = 1$ on P :n ominaisarvo.
Huom! Ominais**vektori** ei säily transponoitaessa, joten mitään yleistä tietoa ei saada vastaavasta ominaisvektorista.

(b) Pidetään tunnettuna, että $\lambda = 1$ on stokastisen matriisin itseisarvoltaan suurin ominaisarvo.

Olkoon P $(n \times n)$ stokastinen matriisi, jonka kaikki ominaisarvot ovat keskenään erisuuret. Olkoon $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ jokin alkupistevektori. Osoita, että iteraatio $\boldsymbol{x}_k = P\boldsymbol{x}_{k-1}, k = 1, 2, \ldots$, suppenee kohti ominaisarvoa 1 vastaavaa ominaisvektoria, valittiinpa alkuarvovektori $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$ miten tahansa.

Tod: Koska kaikki ominaisrvot ovat erilliset, niin P :n ominaisvektorit $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ muodostavat $\mathbb{R}^n$:n kannan. Olkoon $\lambda_1 = 1$ suurin ominaisarvo ja $\boldsymbol{v}_1$ vastaaava ominaisvektori.

Lausutaan alkupistevektori tämän ominaisvektorikannan avulla:
$\boldsymbol{x}_0 = c_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\,\boldsymbol{v}_n$. Nytpä:

$$\boldsymbol{x}_1 = P\,\boldsymbol{x}_0 = c_1\, \underbrace{P\,\boldsymbol{v}_1}_{\lambda_1\,\boldsymbol{v}_1} + c_2\, \underbrace{P\,\boldsymbol{v}_2}_{\lambda_2\,\boldsymbol{v}_2} + \ldots + c_n\, \underbrace{P\,\boldsymbol{v}_n}_{\lambda_n\,\boldsymbol{v}_n}.$$

Soveltamalla matriisia P tähän, saadaan samalla tavalla:

$$\boldsymbol{x}_2 = P\,\boldsymbol{x}_1 = c_1\,\lambda_1^2\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\lambda_2^2\,\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\,\lambda_n^2\,\boldsymbol{v}_n.$$

ja yleisesti:

$$\boldsymbol{x}_k = c_1\,\boldsymbol{v}_1 + c_2\,\lambda_2^k\,\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\,\lambda_n^k\,\boldsymbol{v}_n \quad (\text{koska} \quad \lambda_1 = 1).$$

Koska $|\lambda_j| < 1, \quad j = 2, \ldots, n$, niin $\lambda_j^k \to 0$, kun $k \to \infty$, joten $\boldsymbol{x}_k \to c_1\,\boldsymbol{v}_1$, kun $k \to \infty$.

Tämä riittää.
Joku voi jäädä pohdiskelemaan: *Entä jos alkuvektori $\boldsymbol{x}_0$ sattuu olemaan sellainen, että $c_1 = 0$.* ($\mathbb{R}^3$:ssa tällaisia olisivat kaikki vektorit, jotka sijaitsevat ominaisarvoa $\lambda = 1$ vastaavan ominaisvektorin normaalitasossa.) Tällaiselle alkuvektorillehan kävisi niin, että $\boldsymbol{x}_k \to \mathbf{0}$. Mutta, alkuvektorimme ei ole ihan mikä tahansa. Sitä voidaan sanoa "todennäköisyysvektoriksi", ts. $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ ja $x_j \geq 0$. (Jos summa on jotain muuta,

sillä voidaan jakaa.) Nyt on helppo nähdä, että kun todennäköisyysvektori kerrotaan stokastisella matriisilla, tuloksena on todennäköisyysvektori. (Yleisesti: alkioiden ei-negatiivisuus ja summa säilyvät). Niinpä, $\boldsymbol{x}_k \to \mathbf{0}$ ei ole mahdollinen millään alkuvektorilla $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$ ja siis $c_1 > 0$ kaikilla kyseeseen tulevilla $\boldsymbol{x}_0$.

(c)

$$P = \begin{bmatrix} 0.93 & 0.02 & 0.04 \\ 0.03 & 0.93 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 & 0.92 \end{bmatrix}$$

kertomalla, tässä rivien ja sarakkeiden järjestys etenee oikeistosta vasemmistoon.

Ominaisvektorit muodostavat siis $\mathbb{R}^3$:n kannan, kun ne tiedetään erisuuriksi. (Muistathan, että tämä on riittävä, muttei suinkaan välttämätön ehto.)

Laskettavaksi jää vain ominaisrvoa $\lambda = 1$ vastaava ominaisvektori:

$$A - 1\,I = \begin{bmatrix} -0.07 & 0.02 & 0.04 \\ 0.03 & -0.07 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 & -0.08 \end{bmatrix}$$

Tämä kun Gaussataan, saadaan:

$$\begin{bmatrix} -0.07 & 0.02 & 0.04 \\ 0.0 & -0.061 & 0.057 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Takaisinsijoitus, antaa:

$$\begin{cases} x_2 = 0.9344262295\,x_3 \\ x_1 = 0.8384074941\,x_3 \end{cases}$$

Annetaan x_3 :lle jokin arvo (> 0), vaikkapa $x_3 = 10$, jaetaan summalla $s = x_1 + x_2 + x_3$ ja kerrotaan 100 :lla (jos halutaan prosenttilukujen vektori). Näin saadaan:

$$\begin{bmatrix} Kok : 30.2 \\ Ke : 33.7 \\ Sdp : 36.1 \end{bmatrix}$$

(d) Vapaaehtoinen pohdinta (ei pisteitä).

(1) Ominaisarvot ovat 1, 0.904, 0.876 . Miten voit niiden avulla arvioida virhettä, joka tehdään, kun käytetään raja-arvoa? Vaikuttaako alkupiste?

No, koska 2. suurin ominaisarvo on noin suuri, tarvitaan aika monta iteraatiota, jotta erotus raja-arvoon nähden olisi pieni.

$0.904^{40} = 0.0176$. Tämä tekee “häiriötermit” jo kohtalaisen pieniksi, mikäli alkupistevektorin koordinaatit ominaisvektorikannassa ovat samaa suuruusluokkaa. Jos alkupistevektorissa koordinaatti c_1 on paljon pienempi muita, niin raja-arvomme kuvaa tilannetta, joka menee jo reippaasti yli vaalien. (Kuinka “reippaasti”, riippuu siitä, kuinka paljon “pienempi”.)

(2) Kuka on seuraava pääministeri? Sanotaan, kuten poliitikotkin: Odotetaan ensin vaalin tulos.
(Todettakoon, että siirtymämatriisille P ei ole minkään valtakunnan reaaliteetteihin pohjautuvaa perustetta, kunhan nyt se, että kannatusluvut pysyvät kohtuullisen lähellä toisiaan.)

3. Tarkastelun kohteena olkoon systeemi $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, missä $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$

Muodosta yleinen ratkaisu reaalisessa muodossa, ja ratkaise erityisesti alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}(0) = [1, 0]$ ja piirrä ratkaisu faasitasokuvaan. Hahmottele faasitasokuvan trajektoriparvi suuntanuolineen ja ilmoita O:n tyyppi ja stabiilisuus.

Ominaisarvot: $\pm i$, ominaisvektorit: $1 \pm 3\,i$. Merk. $\lambda = i$ ja $\boldsymbol{w} = [1, 3\,i]$.

Yleinen ratkaisu: $y(t) = [\boldsymbol{u} \;\; \boldsymbol{v}]\, e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta\,t) & \sin(\beta\,t) \\ -\sin(\beta\,t) & \cos(\beta\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$,

missä $\boldsymbol{u} = Re(\boldsymbol{w}) = [1, 0]^T$, $\boldsymbol{v} = Im(\boldsymbol{w}) = [0, 3]$, $\alpha = Re(\lambda) = 0$, $\beta = Im(\lambda) = 3$.

Siis yleinen ratkaisu:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(3\,t) & \sin(3\,t) \\ -\sin(3\,t) & \cos(3\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(3\,t) & \sin(3\,t) \\ -3\sin(3\,t) & 3\cos(3\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Alkuehdosta seuraa välittömästi: $A = 1, \quad B = 0$, ts. $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos(3\,t) \\ -3\,\sin(3\,t) \end{bmatrix}$ Trajektorit ovat siis ellipsejä, joiden puoliakselit ovat 1 ja 3 ja kiertosuunta on myötäpäivään. (Vie − merkki sinin ja kosinin sisään.)
Kiertosuunta nähdään myös suoraan yhtälöstä: Jos lasketaan suuntanuoli pisteessä $[1, 0]$, niin ei muuta kuin $\boldsymbol{y}' = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$, joten pisteestä $[1, 0]$ lähdetään todellakin alaspäin.
Muut trajektorit ovat samanmuotosia ellipsejä, alkuehto $\boldsymbol{y}(0) = [c, 0]$ antaa ellipsin: $\boldsymbol{y}(t) = c \begin{bmatrix} \cos(3\,t) \\ -3\,\sin(3\,t) \end{bmatrix}$
Kyseessä on *keskus*, O on (heikosti) stabiili.
Kuvat ja Maple-käsittely: `www.math.hut.fi/opetus/KP3-ii/06/KOE/helmi06ratk.html`

4. Sovella *Eulerin menetelmää* alkuarvotehtävään
$y'' = ty' - 3y, \quad y(0) = 1, y'(0) = -3.$
Suorita ensin yksi askel arvolla $h = 0.2$ ja sitten 2 askelta arvolla $h = 0.1$.
Vertaa kumpaakin tulosta tarkkaan (4:llä numerolla) arvoon $y(0.2) = 0.3482$ ja totea, että virhe käyttäytyy (kutakuinkin) Eulerin menetelmälle luonteenomaisesti.
Ratkaisu: Ensin muunnos: $y_1 = y, \quad y_2 = y' = y_1'$, joten:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -3\,y_1 + t\,y_2, \end{cases}$$

Ts. $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$, missä $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -3\,y_1 + t\,y_2 \end{bmatrix}$, alkuarvo: $\boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.
(a) $h = 0.2$, yksi askel.
$\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - 3 \cdot 0.2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.40 \\ -3.60 \end{bmatrix}.$$

(b) $h = 0.1$, kaksi askelta.

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - 0.3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.70 \\ -3.30 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -3.3 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -3.3 \\ -3 \cdot 0.7 - 0.1 \cdot 3.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3700 \\ -3.543 \end{bmatrix}$$

Virheet
Annettu tarkka (4:llä numerolla): $y_t = y(0.2) = 0.3482$
Yllä lasketut Euler-approksimaatiot: $y_a = 0.4, \quad y_b = 0.37$. Virheet:
$v_a = y_t - y_a = -0.0518, \quad v_b = y_t - y_b = -0.0218.$
$\frac{v_b}{v_a} = 0.4208494208.$
Kun askel puolittuu, niin virhe kutakuinkin puolittuu.

5. Sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan ($c = 1$) pituus olkoon $L = 10$ cm. Alkuhetkellä $t = 0$ sauvalla on vakiolämpötila $f(x) = 50°\mathrm{C}, \quad 0 < x < 10$, ja sen päät sijoitetaan jääveteen, 0°C.
(a) Määritä sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$.
(b) Kuinka pitkän ajan kuluttua sauvan keskipisteen lämpötila on 10°C? Riittää käyttää approksimaationa sarjan ensimmäistä termiä.