Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Häme

Tentti 3.2.2007

Funktiolaskin sallittu

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

   (a) Lausu b_2 :n ja b_3 :n avulla ehto, jolla yhtälösysteemillä $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on ratkaisuja.

   (b) Määritä yllä olevalla ehdolla kaikki yhtälösysteemin ratkaisut, kun $b_3 = -2$.

2. *Stokastinen matriisi* P tarkoittaa neliömatriisia, jonka alkiot $p_{ij} \geq 0$ ja sarakesummat $= 1$.

   Olkoon P $(n \times n)$ stokastinen matriisi.

   (a) Osoita, että 1 on P :n ominaisarvo.

   (b) Pidetään tunnettuna, että $\lambda = 1$ on stokastisen matriisin itseisarvoltaan suurin ominaisarvo.

   Olkoon P $(n \times n)$ stokastinen matriisi, jonka kaikki ominaisarvot ovat keskenään erisuuret. Olkoon $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ jokin alkupistevektori.

   Osoita, että iteraatio $\boldsymbol{x}_k = P\boldsymbol{x}_{k-1}, k = 1, 2, \ldots,$ suppenee kohti ominaisarvoa 1 vastaavaa ominaisvektoria, valittiinpa alkuarvovektori $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ miten tahansa.

   Pikku yksinkertaistus: Notaatio on aavistuksen verran kevyempi, jos oletat $n = 3$, sen saat tehdä.

   (c) Eduskuntavaalit pidetään 18.3.2007. Hallituksen muodostamista ajatellen (oikeasti laskutyön vähentämiseksi) tarkastelemme vain kolmen suuren, *Kok*, *Ke* ja *Sd* vaaliennusteita ja äänimääriä. Ajatellaan että kannatusluvut muuttuvat päivittäin niin, että seuraavan päivän kannatuslukuvektori $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^3$, saadaan edellisestä stokastisella matriisilla

   $$P = \begin{bmatrix} 0.93 & 0.02 & 0.04 \\ 0.03 & 0.93 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 & 0.92 \end{bmatrix}$$

   kertomalla, tässä rivien ja sarakkeiden järjestys etenee oikeistosta vasemmistoon.

   Viimeksi julkaistun gallupin mukaan näiden puolueiden keskinäisiksi kannatusosuuksiksi saatiin $\boldsymbol{x}_0 = [29.7, 34.3, 36]$ (mikä tämän laskun kannalta on tarpeeton tieto).

   Mitkä ovat kannatusosuudet vaalipäivänä, kun tuloksen likiarvona käytetään raja-arvoa, missä päivien lukumäärä $\to \infty$?

   Avuksi: Laskemalla nähdään, että ominaisrvot ovat erisuuret. (Ei tarvitse laskea.)

   (d) Vapaaehtoinen pohdinta (ei pisteitä).

   (1) Ominaisarvot ovat 1, 0.904, 0.876 . Miten voit niiden avulla arvioida virhettä, joka tehdään, kun käytetään raja-arvoa? Vaikuttaako alkupiste?

   (2) Kuka on seuraava pääministeri?

3. Tarkastelun kohteena olkoon systeemi $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, missä $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$

   Muodosta yleinen ratkaisu reaalisessa muodossa, ja ratkaise erityisesti alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}(0) = [1, 0]$ ja piirrä ratkaisu faasitasokuvaan.

   Hahmottele faasitasokuvan trajektoriparvi suuntanuolineen ja ilmoita O:n tyyppi ja stabiilisuus.

   Huomaa, että kysymys kiertosuunnasta ratkeaa helposti suoraan diffyhtälösysteemistä laskemalla vaikka vain yksi suuntanuoli.

4. Sovella *Eulerin menetelmää* alkuarvotehtävään
   $y'' = ty' - 3y, \quad y(0) = 1, y'(0) = -3.$

   Suorita ensin yksi askel arvolla $h = 0.2$ ja sitten 2 askelta arvolla $h = 0.1$.

   Vertaa kumpaakin tulosta tarkkaan (4:llä numerolla) arvoon $y(0.2) = 0.3482$ ja totea, että virhe käyttäytyy (kutakuinkin) Eulerin menetelmälle luonteenomaisesti.

   Ohje: Muunna alkajaisiksi yhtälö 1. kertaluvun systeemiksi.

5. Sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan ($c = 1$) pituus olkoon $L = 10$ cm. Alkuhetkellä $t = 0$ sauvalla on vakiolämpötila $f(x) = 50°\text{C}, \quad 0 < x < 10$, ja sen päät sijoitetaan jääveteen, $0°$C.

   (a) Määritä sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$.

   (b) Kuinka pitkän ajan kuluttua sauvan keskipisteen lämpötila on $10°$C? Riittää käyttää approksimaationa sarjan ensimmäistä termiä.

Kaavoja, ohjeita

$\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, kompleksiset ominaisarvot

Yleinen (reaalinen) ratkaisu on muotoa
$y(t) = [\boldsymbol{u} \;\; \boldsymbol{v}]\, e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta\, t) & \sin(\beta\, t) \\ -\sin(\beta\, t) & \cos(\beta\, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, missä $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ liittyvät luonnollisella tavalla ominaisvektoreihin ja α ja β yhtä luonnollisella tavalla ominaisarvoihin.

Fourier-kertoimet, f määritelty välillä $(-L, L)$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}), \quad \text{missä}$$

$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx,$
$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \in \mathbb{N}$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Lämpö/diffuusioyhtälö (1-ulotteinen): $u_t = c^2\, u_{xx}$

Lämpöyhtälön ratkaisu, kun sauvan pituus L, reunat $0°$:ssa ja alkuehtona $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\,\pi\,x}{L} e^{-\lambda_n^2\, t}, \quad \lambda_n = \frac{c\, n\, \pi}{L},$$

missä kertoimet B_n määrätään niin, että alkuehto toteutuu.