Teknillinen korkeakoulu Apiola/Häme
Matematiikka

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2006
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/`

Laskuharjoitus 6 (viikko 50 , 11 – 13.12.2006)

Pääsivu: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/`
Viitteet: KRE Ch 11.5.
Luennot: **pe 8.12** pidetään ilman taukoa ja lopetetaan 11.30. Ylimääräinen aika olisi sopivaa käyttää kurssipalautteen kirjoittamiseen. (Kurssisivun kohta *palaute* (tulee päävalikkoon näkyviin pian))
ti 12.12 pidetään yhteenveto- ja kertausluonteinen luento ja se on sitten siinä.

Alkuviikko (ja vain se)

1. (a) Osoita, että funktiot $u_1(x,t) = e^{-\pi^2 c^2 t}\sin(\pi x)$, $u_3(x,t) = e^{-9\pi^2 c^2 t}\sin(3\pi x)$ ja $u(x,t) = 4\,u_1(x,t) - u_3(x,t)$ toteuttavat lämpöyhtälön $u_t = c^2 u_{xx}$ alueessa $0 < x < 1$ ja $t > 0$ ja nollareunaehdot (kohdissa $x = 0$ ja $x = 1$) .
   Kirjoita alkuehtofunktio $f(x) = u(x,0)$ ja hahmottele sen kuvaaja välillä $0 \le x \le 1$.
2. Ratkaise π:n pituista sauvaa koskeva lämpöyhtälö $u_t = u_{xx}$ $(c^2 = 1)$, kun sauvan päät "upotetaan jäihin" (eli pidetään $0°C$:ssa) ja alkulämpötilajakauma on $f(x) = 10\sin x - 5\sin 2\,x + 3\sin 5\,x$.

   Suorita tehtävä käymällä muuttujanerotteluprosessi alusta alkaen läpi. (Ei tarvitse käyttää aikaa "sen erään vakion"negatiivisuusperusteluun.)

   Sovitaan, että lasket tehtävän ikäänkuin Fourier-sarjoja ei olisi keksittykään. Älä siis kirjoita/sovella yhtään kaavaa, jossa esiintyy ääretön summaus.
3. Kuparisauva $(c^2 = 1.14)$, jonka pituus $L = 10$ cm upotetaan kiehuvaan veteen, kunnes sen lämpötila on kauttaaltaana $100°C$. Hetkellä $t = 0$ sauva otetaan vedestä, lämpöeristetään täydellisesti pituussuunnassa ja sen päät työnnetään jäävesisäiliöihin $0°C$.

   Muodosta sauvan lämpötilafunktio $u(x,t)$.

   Arvioi sarjan ensimmäistä termiä käyttäen, kuinka pitkän ajan t_1 kuluttua sauvan maksimilämpötila (keskipisteen lämpötila) on pudonnut puoleen.
4. Sauva, joka on myös päistään lämpöeristetty, johtaa "adiabaattisiin reunaehtoihin": $u_x(0,t) = 0$, $\;u_x(L,t) = 0$.
   Määritä tällaisen täysin eristetyn, $L = \pi-$pituisen sauvan lämpötilafunktio $u(x,t)$, kun alkuehtofunktio $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$, $\;x \in (0,\pi)$.

   Määritä ajasta riippumaton tasapainolämpötila $u_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$.
5. Ohuen neliönmuotoisen kuparilevyn pinnat on lämpöeristetty (reunoja lukuunottamatta). Olkoon neliön sivu $a = 24$. Yläreuna pidetään 20°C-asteessa ja muut reunat 0°:ssa. Määritä tasapainolämpötilajakauma $u(x,y)$, toisin sanoen, ratkaise Laplacen yhtälö $\Delta u = 0$.

Viimeisen harjoituksen riemu ja tuska!

- Kannattaa edelleenkin laskea kotona ainakin 2 ekaa, niistä saa pisteetkin, ja ne ovat lyhyitä.
- Seuraavia kannattaa tietysti myös yritellä kotona. Harjoituksissa saattaa olla realismia ajatus, että assistentti esittää ratkaisut ja oppilaat kyselevät innokkaasti. (Tässä kohdassa voidaan katsoa demolaskarinimityskiellon päättyneen.)

Muistakaa palaute. Lomake ja aikaväli tulevat kurssisivulle valikon kohtaan "palaute", joka ilmaantuu pe 8.12. aamulla.

Lopuksi: Opiskeluintoa, menestystä tentissä, hyvää joulua ja tulevia uusia vuosia! HA