Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Häme

**Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2006**
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/`

**Laskuharjoitus 5** (viikko 49 , 4 – 8.12.2006 (LV 6.12 → 13.12))

Luentomateriaalit: Kalvot,prujut ..., seuraa L-sivun päivityksiä. [KRE] 3.4 – 3.6, 19.1,19.3, 10.1–10.4
Fourier-sarjoista on pruju, joka tulee myös Editan kautta lähipäivinä.

## Alkuviikko

6.12. AV-ryhmäläiset: Vierailkaa muissa ryhmissä.

1. Määritä (EHY):n $\begin{cases} y_1' = 3\,y_1 + y_2 - 3\,\sin 3t \\ y_2' = 7y_1 - 3\,y_2 + 9\,\cos 3t - 16\,\sin 3t \end{cases}$ yleinen ratkaisu.

   Ohje: Suorita tehtävä diagonalisointitekniikalla (KRE s. 187 – 188). Diagonalisoinnissa syntyvät skalaariyhtälöt voit ratkaista joko tyyliin "(HY):n yleinen + (EHY):n erikoinen", missä tuo erikoinen haetaan esim. määräämättömien kertoimien menetelmällä. Yleispätevä tapa on integraalikaava, joka saadaan ns. "vakion variointikaavasta". (KRE) kaava (19) s. 188.

   Vastaus: $\begin{cases} y_1 = c_1\,e^{-4t} + c_2\,e^{4t} + \sin 3t \\ y_2 = -7c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t} + 3\,\cos 3t \end{cases}$

2. Klassinen saalis-saalistaja-ongelma ("ketut ja jänikset", Volterran-Lotkan malli) on seuraavanlainen: Alueella olevien jänisten ja kettujen lukumääriä merkitään $x(t)$:llä ja $y(t)$:llä vastaavasti.

   Ajatellaan, että jänikset syövät ruohoa ja ketut jäniksiä (ja vain niitä). Kasvua rajoittavia tekijöitä ei ole, muuta kuin jäniksille ketut ja ketuille jänisten puute (eli kilpailevat ketut). Tilannetta mallintavat yhtälöt voisivat olla vaikkapa:
   $\begin{cases} x' = 200\,x - 4\,x\,y \\ y' = -150\,y + 2\,x\,y. \end{cases}$

   Määritä systeemin kriittiset pisteet. Linearisoi siinä, jossa populaatiot eivät kuole sukupuuttoon.

3. Määritä edellä linearisoidun systeemin luonne ja piirrä jokin trajektori, jonka pitäisi kuvata alkuperäistä epälineaarista systeemiä, jos ollaan lähellä kriittistä pistettä. (Tässä on kyllä tyyppi, joka yleisesti ottaen voi linearisoinnissa muuttua, mutta tämän systeemin tapauksessa säilyy.)

   Piirrä myös vastaavat koordinaattifunktioiden $x(t)$ ja $y(t)$ kuvaajat ajan funktioina.

   Selvitä faasitason käyrää seuraamalla, miten populaatiot kehittyvät yhden kokonaisen jakson kuluessa.

   "Vapaaehtoinen", mutta suositeltava: Piirrä mieluusti `pplane7`-ohjelmalla MATLAB:ssa. Vahvista samalla kuvan perusteella näkemystä edellä viitattuun tyypin säilymiseen linearisoinnissa.

4. Tarkastellaan vaimennettua heiluria, jonka yhtälö on
   $\Theta'' + c\,\Theta' + k\,\sin(\Theta) = 0$.

   Määritä kriittiset pisteet ja linearisoi niissä. Toisin sanoen, suorita vastaavat asiat, jotka tehtiin luennolla vaimentamattoman heilurin yhteydessä.

   Hahmottele tavalla tai toisella, mieluiten `pplane7`:llä trajektoreita ja selvitä niitä seuraamalla heilurin käytöstä, vertaa vaimentamattoman käytökseen.

   Ohje: Jos avaat KRE8-kirjan s. 177, saat varsin pitkälle menevää avustusta. Suorita joka tapauksessa linearisointi Jakobiaanin avulla, eikä KRE-tyylillä.

   `pplane7`-ohje: Valitsemalla *Gallery* ja sieltä *pendulum*, voit asettaa vaimennusta enemmän tai vähemmän. Kokeile pienellä vaimennuksella aluksi ainakin.

## Loppuviikko

6.12. LV-ryhmäläiset: Tämä harjoitus pidetään ke 13.12.

1. Sovella Eulerin menetelmää lineaariseen systeemiin $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$ $y_1(0) = 0,\quad y_2(0) = 4$.

   Käytä askelpituutta $h = 0.2$ ja laske 3 askelta. Piirrä ratkaisupolku $y_1y_2-$ tasoon (faasitasoon)

   Ratkaise tehtävä myös tarkasti, ominaisarvojen avulla. Hahmottele trajektori ja piirrä edellä saatu ratkaisupolku samaan kuvaan.

2. Ratkaise alkuviikon jänis-kettu-systeemi Eulerin menetelmällä.
   $x(0) = 100, y(0) = 100$ ja laske 3 askelta käyttäen askelta $h = 0.001$. Piirrä polku $xy-$tasoon (faasitasoon). Piirrä mielellään samaan kuvaan "oikea"( ts. paremmalla numeerisella menetelmällä laskettu) trajektori. Ehdotus: Teepä kuin teekin trajektorin piirto `pplane7`-ohjelmalla (mutta älä jää koukkuun).

3. Seuraavat $2\pi$-jaksoiset funktiot on määritelty välillä $[-\pi, \pi]$ alla annetuilla kaavoilla. Hahmottele funktioiden kuvaajat kolmen jaksovälin alueella eli välillä $[-3\pi, 3\pi]$.

   (a) $f(x) = x, \quad (-\pi < x < \pi)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } \; -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{kun } \; 0 < x < \pi \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun} \quad -\pi < x < 0 \\ -x^2, & \text{kun} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

4. Ovatko seuraavat funktio parillisia, parittomia, vai ei kumpaakaan?

   (a) $f(x) = x \cos nx$, (b) $f(x) = x^2 \cos nx$, (c) $f(x) = \cos x + \sin x$, (d) $f(x) = x^2$, kun $0 < x < 2\pi$, $f$ on $2\pi-$jaksoinen.

5. Olkoon $2\pi$-jaksoinen funktio määritelty jakson pituisella välillä näin:
   $f(x) = \begin{cases} c, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

   Piirrä $f$ :n kuvaaja välillä $[-2\pi, 2\pi]$ . Onko $f$ parillinen, pariton tai ei kumpaakaan?

   Muodosta $f$:n Fourier-sarja, kirjoita auki osasumma, joka koostuu 3:sta ensimmäisestä 0:sta poikkeavasta termistä: Piirrä, jos voit, tämän osasumman ja muidenkin kuvia samaan kuvaan funktion kuvaajan kanssa.

   Vast(koko sarja): $f(x) \sim \frac{c}{2} + \frac{2c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}$.
   Vihje: Huomaa, että jaksollisen funktion integraali voidaan laskea minkä tahansa välin yli, joka on jakson pituinen.

6. Muodosta funktion $f(x) = x, \quad 0 < x < L$ (a) parillinen ja (b) pariton jatke välille $[-L, L]$ ja piirrä kummankin $2L-$ jaksoinen jatke välillä $[-4L, 4L]$ ja kerro, minkätyyppisistä termeistä kummankin Fourier-sarjat muodostuvat.

   Laske parittoman jatkeen Fourier-sarja.

   Vast: $f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} - \dots \right)$

## Ohjeita

### Linearisointi:

Olkoon DYS $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases}$ ja olkoon $(a,b)$ kriittinen piste (KRP), ts. $f(a,b) = g(a,b) = 0$.
Pisteessä $(a,b)$ linearisoitu systeemi tarkoittaa systeemiä
$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, missä $u = x - a, \quad v = y - b$ ja $A$ on Jacobin matriisi:

$$A = J_F(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \end{bmatrix}$$

### Diff. yhtälöiden numeriikkaa

Annettu diff. yhtälösysteemi: $\boldsymbol{y}' = f(t,y), \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$
Jos/kun kyseessä on systeemi, niin $\boldsymbol{f}$ ja $\boldsymbol{y}$ ovat vektoriarvoisia.

### Eulerin menetelmä $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y(t_0) = y_0$

### Fourier-kertoimet, $f$ määritelty välillä $(-L, L)$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$
$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$
$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

Nämä kaavat annetaan kokeissa.