Teknillinen korkeakoulu — Apiola/Häme
Matematiikka

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2006
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/`

Laskuharjoitus 4 (viikko 48 , 27.11 – 1.12.2006)

Luentokalvot: `.../06/L/L10kalvot.pdf` (Tulevat pienennyttyinä)
Lay: Ch 5.7, alk. s. 353, [KRE] 3.1 – 3.5, alk. s. 152.
`http://math.rice.edu/~dfield/` hae: pplane7 tai aiempi
Myös kurssin L-hakemistossa on `pplane7.m`

Alkuviikko

Tehtäviä vain 4. Jos aikaa jää, kannattaa ryhtyä LV-tehtävien tekoon neuvotusti.

1. Massapiste liikkuu tasossa olevan voimakentän alaisuudessa siten, että sen paikkavektori $\boldsymbol{y}(t)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$. Matriisin A ominaisarvot ja - vektorit ovat vastaavasti $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{v}_1 = [-2, 1]^T$ ja $\boldsymbol{v}_2 = [1, 1]^T$. Määritä massapisteen paikka ajanhetkellä t, kun $\boldsymbol{y}(0) = [-0.1, 0.1]$. Piirrä ajanhetkiä $t = 0, 1, 1.5, 2$ vastaavat ratkaisupisteet $\boldsymbol{y}(t)$ tasoon ja hahmottele niiden kautta kulkeva trajektori.
2. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 4 l/min ja $B \to A$ 1 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhe tkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä. Kirjoita tehtävä differentiaaliyhtälöpariksi ja määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona.

```
              ----------           ----------
3 l/min  -->          |           |          |
    --                |_________|            |
     |                 4 l/min ->            |
     |               -----------             |
     |      A         |          |    B      |
     |                |---------|            |
     |                 <-- 1 l/min           |
     |                |---------|          ----
     |__________      |          |__________-> 3 l/min
```

Miten pitkän ajan kuluttua suolamäärät säiliöissä ovat yhtäsuuret? Piirrä suolamääräfunktioiden $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ kuvaajat ajan funktiona ja hahmottele myös trajektori $(y_1(t), y_2(t))$.

3. Olkoon 2×2 lineaarisen vakiokertoimisen diffyhtälösysteemin $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ matriisilla A kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda < 0$, ja olkoon sillä kaksi LRT ominaisvektoria. Hahmottele systeemin faasitasokuva suuntanuolineen. Selvitä O:n luonne ja stabiilisuus.
Ohje: Mieti, millaisia ominaisvektorit ovat (tai onko edes olemassa niitä, jotka eivät ole ...). Voit valita mieleisesi ominaisvektorit kannaksi ja päätellä ominaisarvo(j)a tuijottamalla, millaisia trajektorit ovat. Tai voit keskittyä ajattelemaan pelkkiä ominaisvektoreita.
4. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = [2, 3]^T$,
$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$. Vast: $\boldsymbol{y}(t) = e^{-2\,t} \begin{bmatrix} 2 + 3\,t \\ 3 + 9\,t \end{bmatrix}$
Vihje: Degeneraatiotapaus, Vrt. KRE s. 168, exa 6

Loppuviikko

1. Muodosta yleinen ratkaisu yhtälölle $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$,
kun $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
Kirjoita ratkaisu ensin kompleksimuodossa ja siirry sitten reaaliseen. Kuvaile trajektorien muoto ja käytös (vaikka stabiilisuutta ajatellen).
Vast: $\boldsymbol{y}(t) = c_1\, e^{(-2+i)t} \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{(-2-i)t} \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\, e^{-2\,t} \begin{bmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + c_2\, e^{-2\,t} \begin{bmatrix} \sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$ (Voidaan kirjoittaa myös mm. ”matriisitulomuotoon”)
2. Määritä yhtälön $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ yleinen ratkaisu,
kun $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Päättele matriisia päältäpäin katselemalla, että ratkaisu onnistuu suoraviivaisesti.
Määritä $y_1\, y_2\, y_3-$avaruuden taso, jolla sijaitsevat lähtöpisteet lähenevät **0**:aa, kun $t \to \infty$. Minkälaisia käyriä tässä tasossa sijaitsevat trajektorit ovat? Entä miten käy niille pisteille, jotka ovat tämän tason ulkopuolella?
Annetaan ominaisarvot: $2, -1, -1$ ja arvoa 2 vastaava ominaisvektori: $[1, 1, 1]^T$
3. Muunna seuraavat differentiaaliyhtälöt/ryhmät 1. kertaluvun ryhmiksi. (Tarkoitus **ei ole** yrittää ratkaista.)

(a) $y''' + e^t y' + y = 0$, (b) $y'' + k\sin y = 0$ (heiluriyhtälö),

(c) $\begin{cases} y_1'' - y_1' - 2y_1 = t^2 \\ y_2'' - y_2 - 3y_1 = 0 \end{cases}$

Huomaa, että (a) ja (c) ovat lineaarisia, sensijaan (b) on epälineaarinen, joten sille on turha etsiä matriisia.

4. Määritä vapaan vaimennetun värähtelyn:

$$y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

kriittisen pisteen (0,0) luonne tapauksissa
a) ei vaimennusta, $c = 0$, b) alivaimennus, $c^2 < 4mk$,
c) kriittinen vaimennus, $c^2 = 4mk$,
d) ylivaimennus, $c^2 > 4mk$.
Ohje: Kirjoita yhtälö ensin 1. kl. systeemiksi. Esitä perustelut ominaisarvojen tyyppien nojalla. Niiden selvittämisessä voit (mutta ei ole pakko) laskemisen sijasta käyttää toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia (vrt. KRE luku 3.4). Perusteluiksi ei kelpuuteta (nyt eikä kokeessa) ulkoa tai sisältä pamitettuja "pq-ehtoja" KRE-kirjan tyyliin, jos niiden yhteys ominaisarvoihin on kadoksissa!

5. Epähomogeeniyhtälölle (EHY) $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ johdettiin ratkaisukaava: $\boldsymbol{y}(t) = E(t)\boldsymbol{y}_0 + \int_0^t E(t-s)\boldsymbol{g}(s)ds$.
Vektorifunktion integrointi tarkoittaa yksinkertaisesti integrointia komponenteittain.
Tässä $E(t)$, jolle käytetään myös merkintää e^{At} tarkoittaa homogeeniyhtälön (HY) ns. perusmatriisia, ts. matriisia, jonka sarakkeina on (HY):n LRT ratkaisufunktiot ja jolle $E(0) = I$ (yksikkömatriisi).
Ratkaise (EHY) systeemi:

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(0) = (1, -1)$$

Huomaa, että (HY) on sama kuin AV teht. 4.

6. Määritä systeemin

$$\begin{cases} x' = x - x^2 + 2y + 3 \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$

kriittiset pisteet.
Linearisoi systeemi kunkin kriittisen pisteen suhteen ja määritä niiden luonne sekä hahmottele faasikuvaa.

Oppia, ohjeita:

Trajektori tarkoittaa vain sitä, että piirretään $y_1 y_2-$tasoon pisteitä $(y_1(t_1), y_2(t_1)), (y_1(t_2), y_2(t_2)), \ldots$. Näistä pisteistä $(y_1(t), y_2(t))$, t :n juostessa läpi reaaliarvoja, muodostuu tuo faasitasokäyrä, eli trajektori.

Lineaaristen $2 \times 2-$systeemien faasitasoluokitus

Ominaisarvot λ_1, λ_2. Tyyppikuvaus ja stabiilisuus viittaavat kriittiseen pisteeseen, joka lineaarisella homogeenisella on **0**. (Jos A on singulaarinen, niin kaikki $N(A)$:n pisteet ovat kriittisiä pisteitä, mutta alla olevassa luokittelussa tämä suljetaan pois (ts. ominaisarvo 0 on suljettu pois).

- Samanmerkkiset $\Longrightarrow$ *noodi*, jos < 0, niin *nielunoodi*, (vahvasti) stabiili, jos > 0, niin *lähdenoodi*, epästabiili, Trajektorit voivat näyttää potenssifunktiomaisilta erilaisin potenssein (riippuu ominaisarvojen suhteesta), erikoistapauksessa voivat olla jopa sädekimppu. Käytöstä voisi ehkä kutsua yleistetyn "paraabelimaiseksi"
- Erimerkkiset $\Longrightarrow$ *satula*, epästabiili. Sama potenssikäytös kuin edellä, nyt "hyperbelimäisesti" - Vain yksi ominaisvektori $\Longrightarrow$ *degeneroitunut noodi*, jos ominaisarvo $\lambda < 0$, nielu (stabiili) ja jos $\lambda > 0$, niin lähde, epästabiili. Trajektori eivät ulkonäöltään paljon eroa noodityylistä.
- Puhtaasti imaginaariset ominaisarvot ($\pm bi$), *keskus*, heikosti stabiili. Trajektorit ellipsejä.
- Kompleksiset ominaisarvot $\lambda = \alpha \pm i\beta$, *lähdespiraali*, jos $\alpha > 0$, epästabiili, ja *nieluspiraali*, jos $\alpha < 0$, stabiili. Trajektorit elliptisiä spiraaleja.

Linearisointi:

Olkoon DYS $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases}$ ja olkoon (a,b) kriittinen piste (KRP), ts. $f(a,b) = g(a,b) = 0$.
Pisteessä (a,b) linearisoitu systeemi tarkoittaa systeemiä
$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, missä $u = x - a$, $v = y - b$ ja A on Jacobin matriisi:

$$A = J_F(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \end{bmatrix}$$

Jos linearisoidun systeemin O:n luonne on keskus (ominaisarvot puhtaasti imaginaariset), se ei välttämättä kerro alkuperäisen epälineaarisen systeemin KRP:n luonnetta. Muissa tapauksissa ($Re(\lambda) \neq 0$) sensijaan kertoo.

Matlab-ohjelma `pplane7` (tai pplane6 tms. vanhemmalle Matlab-versiolle), kts tehtäväpaperin alussa olevat viitteet), on helppokäyttöinen ja havainnollinen-ohjelma faasitasopiirroksiin. Tarvitsee vain kopioida tiedosto Matlabpolun varrelle ja antaa Matlabissa komento
`>> pplane7`, joka avaa graafisen käyttöliittymän. Mitään muuta MATLAB-osaamista ei tarvita. Ei toimi Octavessa.