

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2006

<http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/>

Laskuharjoitus 3 (viikko 47, 20 – 24.11.2006)

Kurssin www-sivuja:

Pääsivu: <http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/>

Ominaisarvopruju: [.../L/ominaisarvot.pdf](http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/.../L/ominaisarvot.pdf) (Edita-jaossa)

Ominaisarvoteoriaa: Lay: Ch 5, alk. s. 327, [KRE] Ch 7, alk. s. 370.

Alkuviikko

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit. Piirrä koordinaatistoon ominaisvektorit \mathbf{v}_1 ja \mathbf{v}_2 sekä $\lambda_1 \mathbf{v}_1$ ja $\lambda_2 \mathbf{v}_2$.

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja suurinta ominaisarvoa vastaavan ominaisavaruuden kanta(vektori).

Tarkista, että ominaisarvo/vektori-määritelmän ehto toteutuu.

Neuvo: Kehitä determinantti sen rivin/sarakkeen suhteen, jossa on eniten nollia.

Vast: Kysytty ominais(kanta)vektori: $[-1, 1, 1]^T$

3. Määritä h matriisissa $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ niin, että ominaisarvoa

$\lambda = 5$ vastaava ominaisavaruus on 2-ulotteinen. Mitä voit tällöin sanoa tämän ominaisarvon algebrallisesta kertaluvusta, ja minkälainen tekijä siis esiintyy karakteristisessa polynomissa?

4. Määritä seuraavien lineaarikuvausten ominaisarvot ja -vektorit laskematta, pelkän geometrisen kuvailun perusteella.

- (a) Peilaus y -akselin suhteen tasossa \mathbb{R}^2 ,

- (c) Matriisilla $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ kertominen.

- (c) Heijastus yz -tason suhteen \mathbb{R}^3 :ssa.

- (d) Kohtisuora projektio y -akselille \mathbb{R}^2 :ssa.

(Laskeminen LV-tehtäväksi)

5. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit.

Ohje: Kompleksitapauksessa on erityisen hyödyllistä huomata, että 2×2 -matriisin ominaisvektori määräytyy suoraan jommasta kummasta yhtälöstä, ei siis tarvita rivioperaatioita. (Kts. myös yleisiä ohjeita.)

6. Matriisilla $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ on kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda = 1$. Määritä sitä vastaavan ominaisavaruuden kanta.

Mitkä ovat ominaisarvojen algebralliset kertaluvut M_λ ja geometriset m_λ ? Vihje: Toista ominaisarvoa ja vastaavaa ominaisvektoria ei tarvitse laskea (ellet välttämättä halua).

Loppuviikko (7)

1. Laske AV-tehtävän 4 ominaisarvot.
2. Stokastinen matriisi P tarkoittakoon sellaista, jonka alkiot ovat ei-negatiivisia ja sarakesummat $= 1$.¹ Osoita, että 1 on aina P :n ominaisarvo. Vihje: Väite on helppo osoittaa transposille P^T , ajattele ominaisvektorin määritelmää ja mitä saat, jos kerrot P^T :llä vektorin $[1, 1, \dots, 1]$.

3. Eräessä valtiossa pidettiin parlamenttivaalit kolmen puolueen P_1 , P_2 , P_3 kesken. Puolueiden kannatusosuuksien viikoittaista muutosta vaaleja edeltävän puolen vuoden aikana kuvaa siirtymämatriisi $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$.

¹KRE-kirjassa otetaan rivisummat $= 1$.

(a) Määritä matriisin suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori ja päättelä, mitä rajaosuuksia kannatusluvut lähestyvät, kun viikkomäärä kasvaa (tässä ei päästä äärettömyyteen, mutta raja-arvo antaa riittävän tarkan approksimaation).

(b) Kokeile joillain alkujakaumilla \mathbf{x}_0 (siis "todennäköisyysvektoreilla", eli sellaisilla, joiden summa = 1 (tai 100)) ja laske $x_1 = P x_0, x_2 = P x_1, \dots$, Käytä ihmeessä Octavea/Matlabia! Miten nopeasti pääset lähelle raja-arvoa?

4. (a) Osoita, että jos λ on A :n ominaisarvo ja \mathbf{x} vastaava ominaisvektori, niin λ^k on A^k :n ominaisarvo, ja samainen \mathbf{x} on vastaava ominaisvektori.

(b) Oletetaan, että A on kääntyvä. Osoita, että λ^{-1} on A^{-1} :n ominaisarvo ja \mathbf{x} siihen liittyvä ominaisvektori (yhtä hyvin Ax). Mistä tiedät, että $\lambda \neq 0$?

Vihje: (a): Tarvitset vain määritelmää.

Mieti (b)-kohdan loppukysymyksessä: Mitä merkitsee kääntyvyyden nähdessä, jos ominaisarvo on 0? Ajattele vaikkapa homogeeniyhtälön ratkaisuja tms.

5. Päättelä matriisia $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ katsomalla, että se on diagonaloituva, ja laske diagonalisointiesitystä hyödyntäen A^6 .

Ohje: Ominaisvektormatriisi on myös kolmiomuotoinen, joten käänteismatriisi saadaan parilla hassulla "alhaalta ylös" rivioperaatiolla. Matriisioperaatioihin (kuten kertolaskuihin) saat toki mieluusti käyttää ohjelmia tai muuta "matriisilaskinta".

6. (a) Olkoon A 5×5 -matriisi, jolla on kaksi erillistä ominaisarvoa. Toinen ominaisarvo on 2- ja toinen 3-ulotteinen. Onko A diagonalisoituva?

(b) Olkoon A 3×3 -matriisi, jolla on kaksi erillistä ominaisarvoa. Kumpaan liittyvä ominaisarvo on 1-ulotteinen. (Eli kummankin geometrisen kertaluku = 1. Onko A diagonalisoituva?

(c) Olkoon A 4×4 -matriisi, jolla on kolme erillistä ominaisarvoa. Yhden geometrisen kertaluku = 1 ja yhden taas 2. Onko mahdollista, että A ei ole diagonalisoituva?

(d) Olkoon A 7×7 -matriisi, jolla on kolme erillistä ominaisarvoa. Yhden geometrisen kertaluku = 2 ja toisen = 3. Onko mahdollista, että matriisi ei ole diagonalisoituva?

Ohjeita, ominaisarvo-oppia

- **Ominaisarvo** on luku, se voi olla kompleksiluku, vaikka matriisi olisi reaalinen.

- **Ominaisvektori** on (reaalisen matriisin tapauksessa) \mathbb{R}^n :n tai \mathbb{C}^n :n vektori sen mukaan, onko vastaava ominaisarvo reaalinen vai kompleksinen.

- Ominaisarvo saa aivan mainiosti olla 0, ominaisvektoriksi emme hyväksy nollavektoria.

- Ominaisarvoon λ liittyvä **ominaisavaruus** E_λ koostuu kaikista λ :aan liittyvistä ominaisvektoreista ja lisäksi nollavektorista. Tällöin kyseessä on vektori(al)avaruus, nimittäin matriisin $A - \lambda I$ nolla-avaruus, $N(A - \lambda I)$.

- Ominaisarvon λ_j **algebraalinen kertaluku** M_{λ_j} on karakteristisen polynomin $\det(A - \lambda I)$ juuren kertaluku. **Geometrinen kertaluku** m_{λ_j} on $\dim(E_{\lambda_j})$.

Pätee: $m_{\lambda_j} \leq M_{\lambda_j}$

- Jos reaalilla matriisilla A on **kompleksinen** ominaisarvo $\lambda = \alpha + i\beta$, niin myös $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ on A :n ominaisarvo. Jos \mathbf{v} on λ :aa vastaava ominaisvektori, niin liittolukua $\bar{\lambda}$ vastaava ominaisvektori on $\bar{\mathbf{v}}$. (Tarkoittaa vektoria, jonka koordinaatit ovat \mathbf{v} :n koordinaattien liittolukuja.)

- Jos on määrättävä diagonaalimatriisin ominaisarvot ja -vektorit, niin laskentatyötä ei jää lainkaan. Älä siis suotta ryhdy veivaamaan $\det(A - \lambda I)$:n kautta. (Koko ominaisarvohomman perustavoite on saattaa lineaarikuvauksen matriisi diagonaalimuotoon. Jos se jo on, niin mitään ei tarvitse enää tehdä, kunhan osaat siitä lukea.)

- Kolmiomatriisin (ylä- tai ala-) ominaisarvot ovat diagonaalialkiot. (Siis yleistys edelliselle, tässä tapauksessa ominaisvektoreista ei voida sanoa mitään yleistä.)

- Kun pyydetään laskemaan johonkin ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit, on sopivaa antaa vastaukseksi ominaisavaruuden kanta. Helpoimmin se saadaan antamalla ratkaisun vapaille muuttujille vuorollaan arvot $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (jos kyseessä on 3-ulotteinen ominaisavaruus). Tässä on kyse nolla-avaruuden kannan määräämisestä.

- Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat LRT.

- Diagonalisointi: Annettu A . Etsittävä, jos mahdollista, matriisit V ja D , V kääntyvä ja D diagonaalimatriisi siten, että $A = VDV^{-1}$.
Jos tehtävänä on diagonalisoida A , etsitään matriisit V ja D ja perustellaan V :n kääntyvyys. (Yleensä ei vaadita V^{-1} :n laskemista ilman eri kehoitusta, tai jatkotehtävän asettamaa tarvetta.)
- Octave/Matlab-komentoa `eig` kannattaa käyttää ainakin tarkistukseen. Muoto `[V,D]=eig(A)` antaa suoraan diagonalisointimatriisit: V :n sarakkeina ominaisvektorit ja D :n diagonaalilla (samassa järjestyksessä) ominaisarvot. Jos A on diagonalisoituva, niin V :n sarakkeet ovat LRT, jolloin voidaan muodostaa V^{-1} ; Matlab/Octavella: `inv(V)`.