Matematiikan peruskurssi KP3 I
OSA 1: Johdatus kompleksilukuihin

Antti Rasila Jan v.Pfaler (modif.)

11. syyskuuta 2007

Määritelmä

Kompleksiluku on $z = x + iy$, missä **imaginaariyksikkö** i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$ ja x, y ovat reaalisia.

Määritelmä

$\mathrm{Re}\, z = x$ on z:n **reaaliosa**.
$\mathrm{Im}\, z = y$ on z:n **imaginaariosa**.

Esimerkki

Kompleksiluvun $4 - 8i$ *reaaliosa on* 4 *ja imaginaariosa* -8.

Perusominaisuuksia

- Kompleksiluvut $z = a + ib$ ja $w = c + id$ ovat yhtäsuuret täsmälleen silloin, kun $a = c$ ja $b = d$.
- Erityisesti kompleksiluku $z = a + ib$ on nolla täsmälleen silloin, kun $a = 0$ ja $b = 0$.
- Vertailuoperaatiot $<, \leq$ eivät ole määriteltyjä kompleksiluvuille.

Laskutoimitukset kompleksiluvuilla

Olkoot $z = a + ib$ ja $w = c + id$ kompleksilukuja. Tällöin laskutoimitukset saadaan seuraavasti.

- Summa:
$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$
- Vastaluku
$$z + (-1)z = z + (-z) = 0.$$
- Tulo:
$$\begin{aligned} zw &= (a + ib)(c + id) \\ &= ac + i^2 bd + iad + ibc \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Laskutoimitukset kompleksiluvuilla, esimerkki

Olkoon $z = 3 + 4i$, $w = 1 - 5i$.

$z + w = 4 - i$,

$z - w = 2 + 9i$,

$$\begin{aligned} zw &= 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + i(4 \cdot 1 - 3 \cdot 5) \\ &= 23 - 11i, \end{aligned}$$

Imaginaariyksikön potenssit

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \ldots, \qquad i^{4*10+3} = i^3$$

Reaaliluvut ja kompleksiluvut

- Jos $z = a + 0i$, eli $\mathrm{Im}\, z = 0$ niin z on reaaliluku.
- Jos imaginaariosa on nolla, kaavat palautuvat tunnetuiksi reaalilukujen ominaisuuksiksi.

Kompleksilukujen algebraa

- Vaihdannaisuus:
$$z + w = w + z, \qquad zw = wz.$$
- Liitännäisyys:
$$(z + w) + u = z + (w + u), \qquad (zw)u = z(wu).$$
- Osittelulaki:
$$z(w + u) = zw + zu.$$

Kompleksikonjugaatti eli liittoluku

Konjugaatti

Kompleksiluvun
$$z = x + iy$$
kompleksikonjugaatti eli **liittoluku**
$$\bar{z} := x - iy$$

- $$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$
- $$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z, \qquad z - \bar{z} = i2\,\mathrm{Im}\,z.$$
- $$\mathrm{Re}\,z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\,z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$
- $$\bar{\bar{z}} = z.$$

Seurauksia

Seuraus 1

Reaalikertoimiselle kompleksimuuttujan polynomille
$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$
pätee $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$.

Todistus. Lasketaan
$$\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_2 \bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n \bar{z}^n.$$
Koska a_k on reaalinen, $\bar{a}_k = a_k$ kaikilla $k = 0, \ldots, n$, saadaan
$$P(\bar{z}) = a_0 + a_1 \bar{z} + a_2 \bar{z}^2 + \ldots + a_n \bar{z}^n = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_2 \bar{z}^2 + \ldots + \bar{a}_n \bar{z}^n = \overline{P(z)}.$$
□

Seurauksia

Seuraus 2

Reaalikertoimisen polynomin nollakohta on joko reaalinen tai kompleksisessa tapauksessa liittolukupari.

Todistus. Olkoon $z = x + iy$ reaalikertoimisen polynomin P kompleksinen nollakohta. Edellisen nojalla saadaan
$$0 = \bar{0} = \overline{P(z)} = P(\bar{z}),$$
joten myös $\bar{z}$ on P:n nollakohta. □

Kompleksitaso

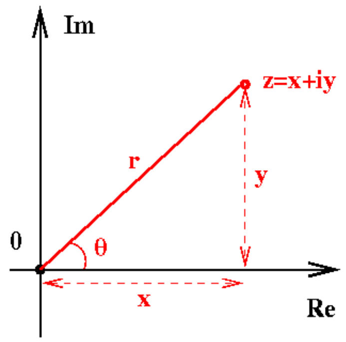
(Caspar Wessel 1797, Jean Argand 1806)

Moduli eli itseisarvo:

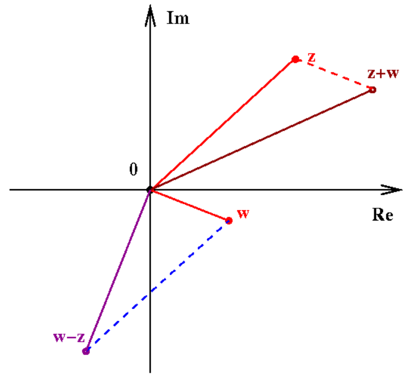
$$r \equiv |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Argumentti eli vaihekulma:

$$\theta \equiv \arg z = \arctan \frac{y}{x}.$$



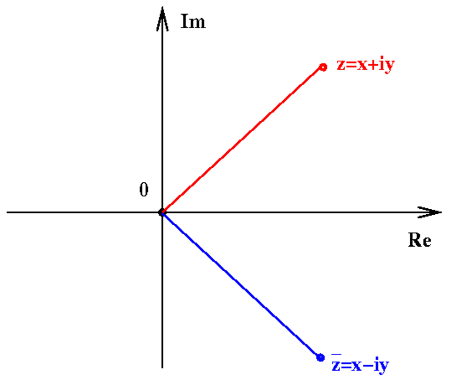
Yhteen- ja vähennyslaskun geometrinen tulkinta



Kompleksilukujen yhteen- ja vähennyslasku vastaavat vektorien laskutoimituksia.

Liittoluvun tulkinta

Liittoluvulle voidaan antaa geometrinen tulkinta kompleksitasossa



eli peilaus reaaliakselin suhteen.

Modulin ominaisuuksia

- Kaikilla $z \in \mathbb{C}$, kompleksiluvun moduli $|z| \geq 0$, erityisesti
$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0.$$
- Kerto ja jakolasku:
$$|zw| = |z||w|$$
- Kolmioepäyhtälö:
$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$
- Normi:
$$|x + iy| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$$

Käänteisluku

Selvästi

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

kaikilla $z \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$, niinpä voimme kirjoittaa $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
Kahden kompleksiluvun osamäärälle pätee siten

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}}$$

ja modulille

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \qquad \left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}, \qquad \left|z^k\right| = |z|^k, \text{ kokonaisluvuille } k$$

Kolmioepäyhtälön todistus

Lasketaan

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2. \end{aligned}$$

Koska $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}\bar{\bar{w}} = \bar{z}w$, ja siis

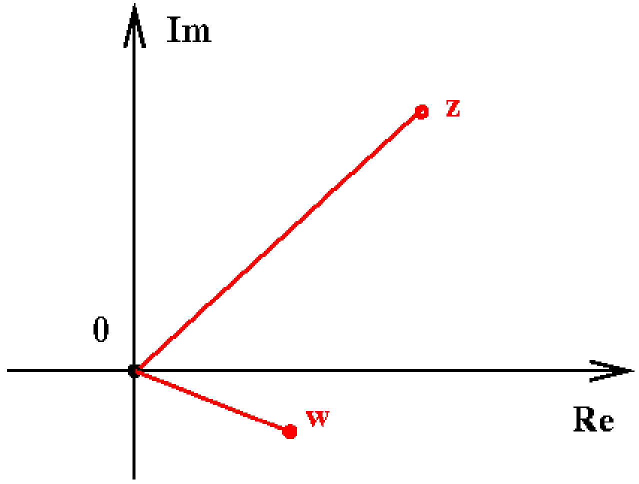
$$z\bar{w} + \bar{z}w = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) \leq 2|z||w|,$$

saadaan

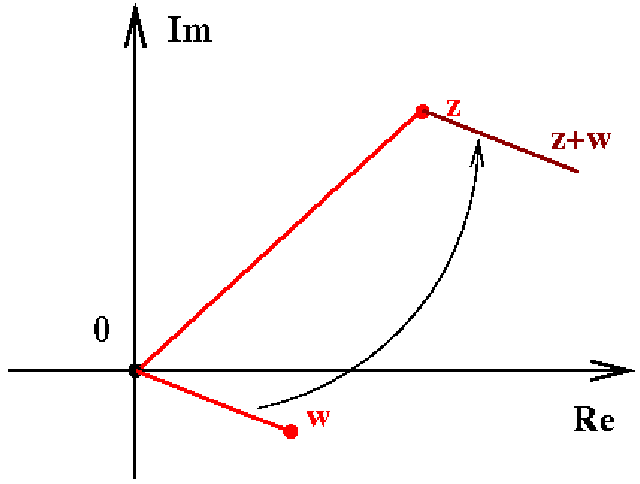
$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.$$

□

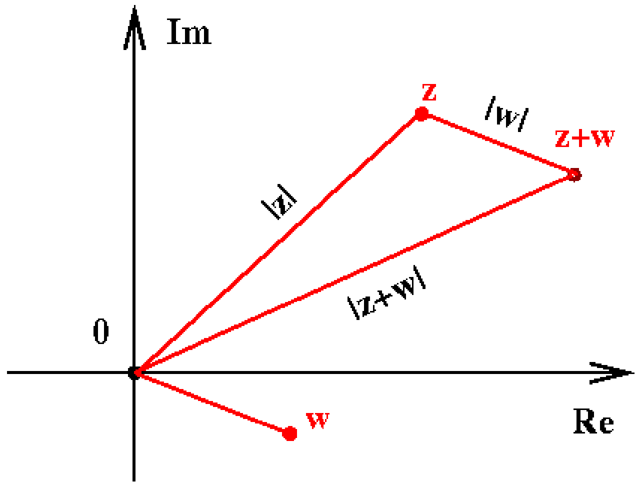
Kolmioepäyhtälön geometrinen tulkinta



Kolmioepäyhtälön geometrinen tulkinta



Kolmioepäyhtälön geometrinen tulkinta



Seuraus

Määritelmä

Jonolla $z_1, z_2, \ldots$ on raja-arvo z, merkitään $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen N, että

$$|z_n - z| < \varepsilon, \text{ kun } n > N.$$

Lause

Olkoon (z_n) jono kompleksilukuja. Tällöin $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ ja $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

Todistus. Seuraa välittömästi kolmioepäyhtälöstä. □

Argumentin päähaara

- Argumentin arvot ovat välillä

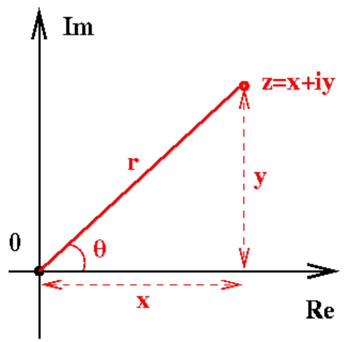
$$-\pi < \theta \equiv \operatorname{Arg} z \leq +\pi.$$

- Yleisesti:

$$\arg z = \theta + 2n\pi,$$

missä θ on päähaaran arvo ja n on mikä tahansa kokonaisluku.

Polaarimuoto



Kuvasta nähdään:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Siis

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta. \end{aligned}$$

Saadaan kompleksiluvun esitys **polaarimuodossa**:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Eulerin kaava

Eksponenttifunktiolle ja trigonometrisille funktioille pätevät kaikille reaaliluvulle t seuraavat sarjaesitykset:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots \tag{7.1}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \tag{7.2}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + \ldots \tag{7.3}$$

Huomaa: potenssisarjaesitykset suppenevat kaikilla $t \in \mathbb{R}$, joten sarjan termien järjestys voidaan vaihtaa.

Eulerin kaava, jatkoa

Jos hyväksytään annetut sarjaesitykset, niin:

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \ldots \\ &= 1 + it + \frac{i^2t^2}{2!} + \frac{i^3t^3}{3!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + i\Big(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots\Big) \\ &= \cos(t) + i\sin(t). \end{aligned}$$

Saadaan *Eulerin kaava*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{7.4}$$

Seurauksia, identiteetit trigonometrisille funktioille

Koska

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\ e^{-i\theta} &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= \cos(\theta) - i\sin(\theta). \end{aligned}$$

Saadaan seuraavat kaavat:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{7.5}$$

Identiteetit trigonometrisille funktioille

Yleisesti kompleksiluvulle $z = x + iy$ määritellään sarjan avulla

$$\begin{aligned} e^z &:= 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots \\ &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \end{aligned}$$

Samalla tavalla käyttäen sarjaa määritelmänä

$$\begin{array}{ll} \cos z := \cdots = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), & \tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \sin z := \cdots = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), & \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}. \end{array}$$

Huomaa, että tämän seurauksena pätee

$$e^z = \cos z + i\sin z$$

Huomaa: Sarjat suppenevat koska suppenemista voidaan tarkastella erikseen osasummien reaali- ja imaginaariosille; niiden suppeneminen vuorostaan palautuu reaalisten sarjojen ominaisuuksiin.

Hyperboliset funktiot

Määritellään:

$$\cosh z := \cos(iz), \qquad i \sinh z := \sin(iz).$$

Saadaan kaavat

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Kuten edellä, voidaan myös määritellä

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Identiteettejä eksponenttifunktiolle

- $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1.$
- Siis
$$|e^{i\theta}| = 1. \tag{7.6}$$
- Koska $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, saadaan
$$|e^z| = e^x, \qquad \arg(e^z) = y, \tag{7.7}$$
- $$e^{i2\pi} = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1 \text{ ja } e^{-i\pi/2} = -i. \tag{7.8}$$
- $$e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z. \tag{7.9}$$

Kertolaskun geometrinen tulkinta

Sovelletaan Eulerin kaavaa kompleksilukujen kertolaskuun:

$$w = z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Kompleksilukujen kertolaskussa: modulit kerrotaan $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, ja argumentit lasketaan yhteen $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

De Moivren kaava

Lasketaan esitys kompleksiluvun kokonaislukupotenssille:

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(n\theta)} = r^n(\cos n\theta + \sin n\theta).$$

Erityisesti, jos $r = 1$, saadaan:

Lause (De Moivre)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \tag{8.1}$$

Kompleksiluvun juuret

De Moivren kaava on erityisen hyödyllinen etsittäessä kompleksiluvun $z_0 \neq 0$ n:nsiä juuria. Jos $z^n = z_0$, voidaan kirjoittaa $z = re^{i\theta}$ ja $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, ja saadaan

$$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0},$$

eli

$$r = \sqrt[n]{r_0} \text{ ja } n\theta = \theta_0 + 2k\pi,$$

missä $r = \sqrt[n]{r_0}$ on positiivisen reaaliluvun r_0 n:s juuri.

Kompleksiluvun juuret, jatkoa

Kaikki luvun z n:net juuret saadaan siis kaavasta

$$\sqrt[n]{|z_0|}e^{i(\theta_0+2k\pi)/n}, \tag{9.1}$$

missä k on mikä tahansa kokonaisluku.
Havaitaan myös, että jokainen $k = 0, 1, \ldots, n-1$ antaa eri arvon, mutta muut k:n arvot vain toistavat jonkun edellisistä, koska $e^{2\pi ik/n} = 1$, kun k/n on kokonaisluku joten $e^{2\pi i(k+n)/n} = e^{2\pi ik/n}e^{2\pi in/n} = e^{2\pi ik/n}$. Siten kompleksiluvulla $z_0 \neq 0$ on täsmälleen n n:ttä juurta.

Kaavasta (9.1) havaitaan myös, että kaikki juurilla on sama itseisarvo $\sqrt[n]{|z_0|}$, ja argumentit ovat tasavälisiä. Siksi kaikki juuret sijaitsevat origokeskisen ympyrän kehällä. Ympyrän säde on $\sqrt[n]{|z_0|}$.

Kompleksiluvun juuret, jatkoa

Olemme osoittaneet:

Lause

Jos $z = e^{i\theta} \neq 0$, yhtälöllä $w^n = z$ on täsmälleen n erillistä ratkaisua, jotka saadaan kaavasta

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \tag{9.2}$$

missä $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\sqrt[n]{r}$ on luvun $r = |z|$ positiivinen n:äs juuri ja $\theta = \operatorname{Arg} z$.

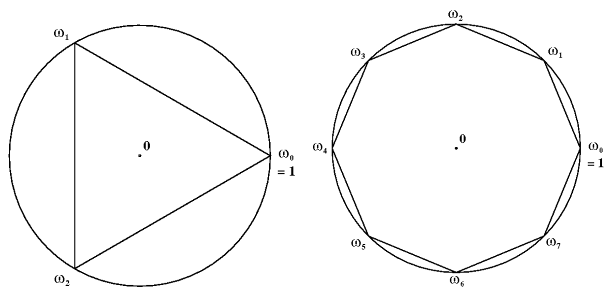
Ykkösen juuret: $z^n = 1$

Esimerkki

Ykkösen n:net juuret, yhtälön $z^n = 1$ ratkaisut, saadaan kaavasta

$$\omega_k = e^{i2k\pi/n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9.3}$$

Kuva: Ykkösen n:net juuret, kun $n = 3$ ja 8.



Ykkösen juuret, jatkoa

Asetetaan jollakin kokonaisluvulla n, $\omega = e^{2\pi i/n} \neq 1$. Selvästi $\omega^n = 1$, ja kaikki ykkösen n:nnet juuret ovat tällöin $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}$.

$$0 = \omega^n - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1}).$$

Koska $\omega \neq 1$, saamme

$$1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} = 0.$$

Logaritmifunktiot

On luonnollista ajatella logaritmifunktiota eksponenttifunktion käänteiskuvauksena. Palautetaan mieleen seuraavat eksponenttifunktion perusominaisuudet reaaliluvuille:

- $e^x > 0$ kaikille $x \in \mathbb{R}$,
- $e^x \to \infty$, kun $x \to \infty$,
- $e^{-x} = 1/e^x$ (joten $e^x \to 0$, kun $x \to -\infty$),
- $\frac{\partial}{\partial x} e^x = e^x$, ja siten e^x on aidosti kasvava.

Logaritmifunktiot, jatkoa

Eksponenttifunktio e^x on siis jatkuva, aidosti kasvava ja derivoituva funktio $\mathbb{R}$:ltä joukolle $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Siten sillä on jatkuva ja aidosti kasvava käänteiskuvaus, (luonnollinen) logaritmi (kantaluku e)

$$\ln \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},$$

jolle pätee $\ln x = y$ on yhtälön $e^y = x$ ratkaisu. Erityisesti jokaiselle $x > 0$ on olemassa täsmälleen yksi sellainen y, että $e^y = x$.

Logaritmifunktiot, jatkoa

Samaan tapaan voidaan määritellä kompleksiluvun z logaritmi $w \in C$ yhtälön $e^w = z$ ratkaisuna, eli kirjoitetaan $w = \ln z$, jos $e^w = z$.
Koska $e^w \neq 0$ kaikilla $w \in \mathbb{C}$, luvulla 0 ei ole logaritmia.
Tarkastellaan mielivaltaista kompleksilukua $z \neq 0$ polaarimuodossa

$$z = |z| e^{\mathrm{Arg}\, z} = re^{i\theta} \qquad (r = |z| > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi).$$

Ratkaistaan yhtälö $w = \ln z$.
Jos kirjoitetaan $w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, niin yhtälö $e^w = z$ saadaan muotoon $e^{x+iy} = re^{i\theta}$ joten

$$e^x = r,\ e^{(y-\theta)i} = 1,\ \text{eli } x = \ln r,\ v = \theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

Saadaan siis seuraava kaava kompleksiluvun $z \neq 0$ logaritmille:

$$w = \ln z = \ln |z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

jos ymmärrämme $\arg z$ joukkona:

$$w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$$

Logaritmin päähaara

Logaritmin päähaara (merkitään Ln) vastaa argumentin päähaaraa. Toisin sanoen, jos $z \neq 0$, niin

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i \mathrm{Arg}\, z, \qquad -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi.$$

Jos z on positiivinen reaaliluku (eli $\mathrm{Arg}\, z = 0$), tämä vastaa merkinnän merkinnän "$\ln z$" tuttua merkitystä.

Esimerkkejä

- $\mathrm{Ln}\,(\pm i) = \pm i\pi/2$,
- $\mathrm{Ln}\,(1+i) = \ln \sqrt{2} + i\pi/4$,
- $\mathrm{Ln}\,((1 \pm i)/\sqrt{2}) = \pm i\pi$,
- $\mathrm{Ln}\,(-1) = i\pi$,
- $\mathrm{Ln}\,(i^{1/4}) = i\pi/8$,
- $\mathrm{Ln}\,(\alpha z) = \ln \alpha + \mathrm{Ln}\, z$ $(\alpha > 0)$,

Tulon logaritmi

Yleisesti kompeksiluvuille z_1, z_2 ei ole totta, että

$$\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2,$$

vaikka rajoituttaisiin logaritmin päähaaran tarkasteluun.

Jos $z_1, z_2 \neq 0$, pätee kuitenkin:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \qquad (\mod 2\pi), \tag{10.1}$$

ja

$$\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2 \qquad (\mod 2\pi). \tag{10.2}$$

Yleinen potenssi

Kompleksiluvun $z = x + iy$ yleinen potenssi määritellään kaavalla

$$z^c = e^{c \ln z}, \tag{10.3}$$

missä $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Koska $\ln z$ ei ole yksikäsitteinen, ei myöskään z^c ole yksikäsitteinen.

Erityisesti

$$z^c = e^{c\, \mathrm{Ln}\, z},$$

on päähaaran arvo.

Avoimet ja suljetut joukot

Merkitään:

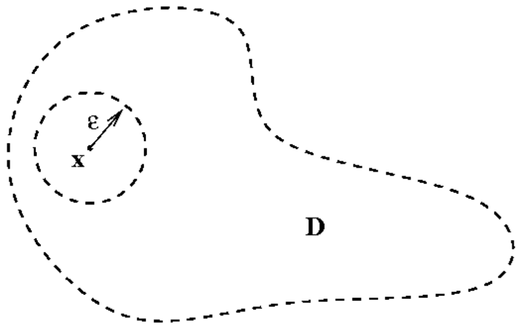
$$\begin{aligned} B(z,r) &= \{w : |z-w| < r\} \text{ (avoin kiekko)}, \\ \overline{B}(z,r) &= \{w : |z-w| \le r\} \text{ (suljettu kiekko)}. \end{aligned}$$

Määritelmä

Joukko $D \subset \mathbb{C}$ on *avoin*, jos jokaiselle $z \in D$ on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(z,r) \subset D$.

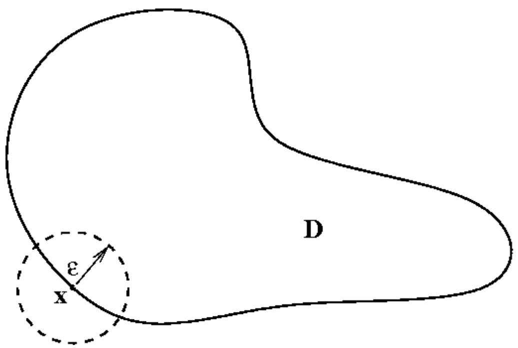
Joukko $E \subset \mathbb{C}$ on *suljettu*, jos sen komplementti $D = \mathbb{C} \setminus E$ on avoin.

Avoin joukko



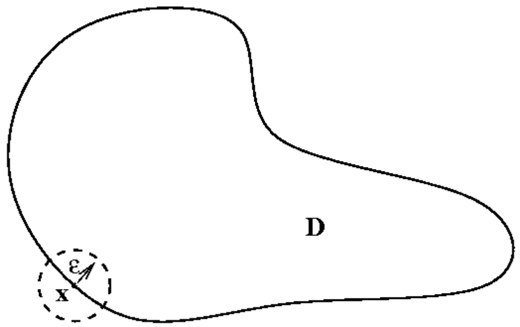
Kaikille $x \in D$ löydetään sellainen $\varepsilon > 0$, että $B(x,\varepsilon) \subset D$.

Joukko, joka ei ole avoin



Joukkoon D kuuluu (ainakin yksi) sellainen piste x, jolla $B(x,\varepsilon)$ ei koskaan sisälly kokonaan joukkoon D.

Joukko, joka ei ole avoin



Joukkoon D kuuluu (ainakin yksi) sellainen piste x, jolla $B(x,\varepsilon)$ ei koskaan sisälly kokonaan joukkoon D. Säteen pienentäminen ei auta.

Avoin ympäristö

Määritelmä

Joukko $D \subset \mathbb{C}$ on pisteen $z \in \mathbb{C}$ (avoin) ympäristö, jos D on avoin ja $z \in D$.

Yhtenäisyys, alueet

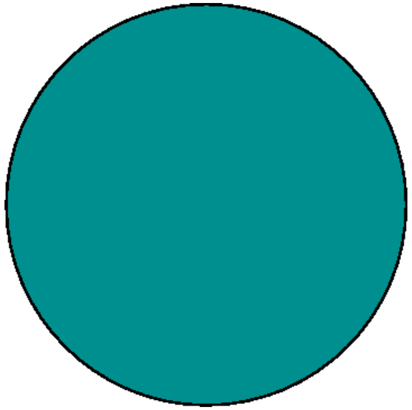
Määritelmä

Joukko $D \subset \mathbb{C}$ on *yhtenäinen*, jos kaksi pistettä $z, w \in D$ voidaan aina yhdistää murtoviivalla joukossa D.

Määritelmä

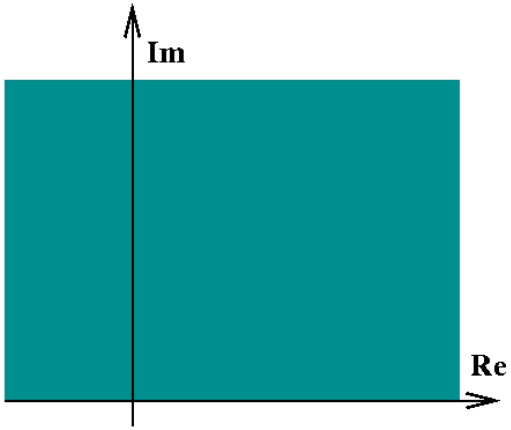
Joukko $D \subset \mathbb{C}$ on *alue*, jos se on avoin ja yhtenäinen.

Esimerkkejä alueista



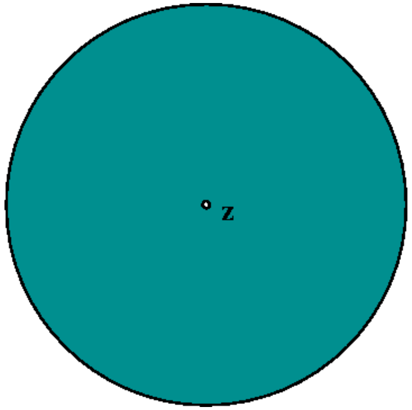
Kiekko (avoin kiekko, jossa reuna ei kuulu alueeseen). Esimerkiksi $\{z : |z| < 1\}$.

Esimerkkejä alueista



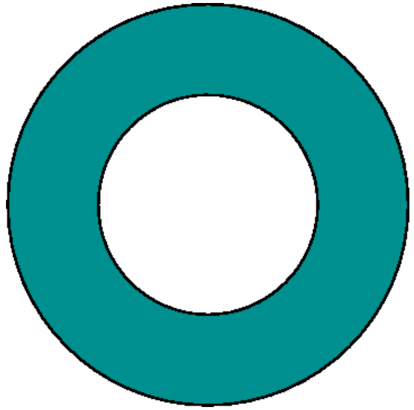
(Ylempi) puolitaso $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Esimerkkejä alueista



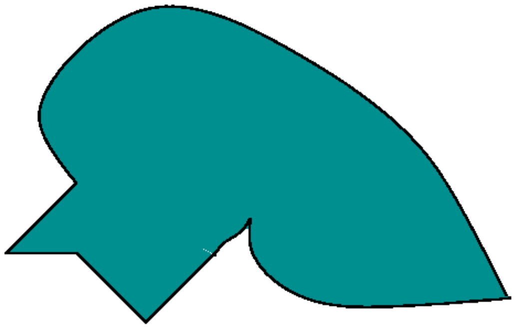
Punkturoitu kiekko, esimerkiksi $\{z : 0 < |z| < r\}$, jossa $r > 0$.

Esimerkkejä alueista



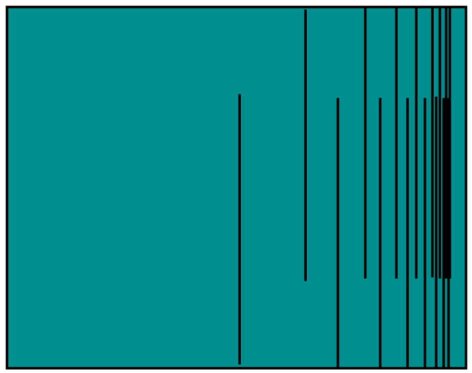
Ympyrärengas eli annulus, esimerkiksi $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$, jossa $r > 0$ ja $z_0 \in \mathbb{C}$.

Esimerkkejä alueista



Alue, jonka reuna on epäsäännöllinen.

Esimerkkejä alueista

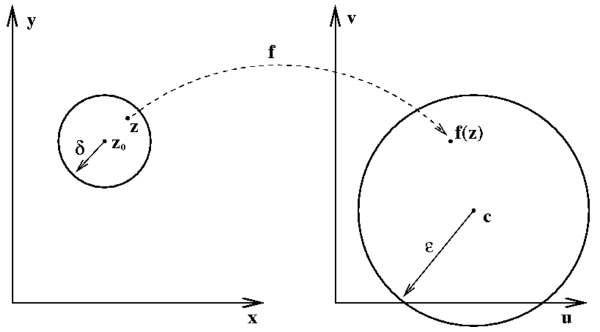


Kampa-avaruus

Raja-arvo

Määritelmä

Funktiolla $f\colon D \to \mathbb{C}$ on raja-arvo c pisteessä z_0 (merkitään $\lim_{z\to z_0} f(z) = c$), jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos $|z - z_0| < \delta$, niin $|f(z) - c| < \varepsilon$.



$D \mapsto f(D)$

Jatkuvuus

Määritelmä

Funktio f on *jatkuva* pisteessä z_0, jos f on määritelty jossakin z_0:n ympäristössä ja $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$.