Pyrimme nyt kehittämään analyyttisyyskriteerin, joka on esitettävissä reaalifunktioiden $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ avulla.

Tiedämme, että välttämätöntä on, että eros-raja-arvot pitkin $x-$ ja $y-$ suuntia yhtyvät. Siitä päästään koordinaattifunktioiden osittaisderivaattoja koskevaa ehtoon, joka tunnetaan *Cauhcy–Riemannin* yhtälöinä.

Olkoon siis $f = u + iv$ funktio, joka on määritelty pisteen $z = x + iy$ ympäristössä.

Oletetaan, että f on kompleksifunktiona derivoituva pisteessä $z = x + i\,y$.

Muodostetaan erotusosamäärä:

$$e(z, \Delta\, z) = \frac{f(z + \Delta\, z) - f(z)}{\Delta\, z} = \frac{u(z + \Delta\, z) - u(z)}{\Delta\, z} + i\,\frac{v(z + \Delta\, z) - v(z)}{\Delta\, z}.$$

Oletuksemme mukaan erotusosamäärällä on kompleksitasossa raja-arvo $f'(z)$, joten sillä on erityisesti raja-arvo lähestyttäessä koordinaattiakselien suuntaan, ja kumpikin raja-arvo yhtyy $= f'(z)$.

(1) Muodostetaan ensin erotusosamäärä $x-$ akselin suunnassa, ts. $\Delta\, z = \Delta\, x$.

$$e(z, \Delta\, x) = \frac{u(z + \Delta\, x) - u(z)}{\Delta\, x} + i\,\frac{v(z + \Delta\, x) - v(z)}{\Delta\, x}$$

Koska raja-arvo on, niin reaaliosalla ja imaginaariosalla on raja-arvot. Toisaalta nämä ovat tasan tarkkaan osittaisderivaatat $u_x(z)$ ja $v_x(z)$. [2] Siispä osittaisderivaatat x :n suhteen ovat olemassa ja pätee: $f'(z) = u_x(z) + i\,v_x(z)$.

(2) Muodostetaan toiseksi erotusosamäärä $y-$ akselin suunnassa, ts. $\Delta\, z = i\,\Delta\, y$. Rutiinisievennys (teepä se, jotta rutiini säilyy ja kehittyy) antaa:

$$e(z, i\,\Delta\, y) = \frac{v(z + i\,\Delta\, y) - v(z)}{\Delta\, y} - i\,\frac{u(z + i\,\Delta\, y) - u(z)}{\Delta\, y}.$$

Samoin kuin edellä, johdutaan nyt yhtälöön $f'(z) = v_y(z) - i\,u_y(z)$.

Siis osittaisderivaatat $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ovat olemassa, ja

$u_x(z) + i\,v_x(z) = f'(z) = v_y(z) - i\,u_y(z)$.

Reaaliosien ja imaginaariosien on siten oltava samat, joten

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (5.1)}$$

Tässä nyt komeilevat nuo mainitut *Cauhcy–Riemannin* yhtälöt (lyhyesti CR-yhtälöt).

Esimerkki 5.1. Katsotaan pari tuttua esimerkkiä, joiden tuloksen tiedämme:

(1) $f(z) = z^2$, (2) $f(z) = \overline{z}$.

[2] Ehkä näyttää vielä tutummalta, jos kirjoitat u- ja v-kaavat tyyliin $\frac{u(x+\Delta\, x, y) - u(x,y)}{\Delta\, x}$, $\frac{u(x, y+\Delta\, y) - u(x,y)}{\Delta\, y}$.

Cauchy-Riemannin yhtälöt ovat **välttämätön ehto** derivoituvuudelle. Mikä riemukkainta, ne ovat myös **riittävä ehto**, mikäli **oletamme osittaisderivaatoista** jotain: nimittäin **jatkuvuuden**.

Toisin kuin [KRE]-kirja esittää, tuo ei ole olennaisesti vaikeampi todistaa kuin välttämättömyyskään. Osa todistusta sisältyy siihen 2-kurssilla esitettyyn asiaan, että osittaisderivaattojen jatkuvuudesta seuraa "differentioituvuus" joka puolestaan on se "oikea" lisäehto.

No, emme kuitenkaan malta käyttää tähän nyt aikaa. ([KRE]-kirjassa todistus on myös jätetty väliin, tosin se sisältyy kirjan Appendix 4:ään, mutta hiukan "suttuisessa" muodossa sisältäen tuon mainitun 2-kurssin asian todistuksen.)

Ahlforsin kirjassa [Ahl] (alla) asia on tehty "oikaoppisesti", samoin esim. Nevanlinna–Paatero: Funktioteoria (1960-luvulta).

Näin olemme todistaneet tärkeän lauseen välttämättömyyspuolen sekä selittäneet viittein riittävyyspuolen.

Lause 5.1 (Cauchy–Riemann). *(1) Jos $f = u + iv$ on derivoituva pisteessä $z \in \mathbb{C}$, niin CR-yhtälöt toteutuvat.*

(2) Jos u :lla ja v:llä on jatkuvat osittaisderivaatat ja CR-yhtälöt toteutuvat, niin f on derivoituva pisteessä z.

Jos ehdot ovat voimassa, niin $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$. (Voidaan lausua CR-yhtälöiden avulla muissakin muodoissa, kuten $f'(z) = v_y(x,y) - i\,u_y(x,y)$.

Esimerkkejä CR-yhtälöiden käytöstä. Vastaesimerkkien käsittely mekanisoituu.

Esimerkki 5.2. Katsotaan CR-yhtälöiden valossa alkuesimerkkiämme (4.2 s. 10), $f(z) = \bar{z} = x - i\,y$. Nyt $u = x, \quad v = -y$, joten $u_x = 1$ ja $v_y = -1$. Niinpä 1. CR-yhtälö ei ole voimassa missään, joten funktio ei ole derivoituva missään pisteessä z.

Esimerkki 5.3. $f(z) = z\,\bar{z} = |z|^2$. Nyt $u(x,y) = x^2 + y^2$ ja $v(x,y) = 0$, joten $u_x = v_y \iff 2\,x = 0$. $u_y = -v_x \iff 2\,y = 0$. Siten CR-yhtälöt ovat voimassa vain O :ssa. Näin ollen f on derivoituva vain O :ssa. Siispä meillä on yksinkertainen esimerkki funktiosta, joka on derivoituva vain yhdessä pisteessä ja siten se ei ole analyyttinen missään. (Muista, että analyyttisyys pisteessä tarkoittaa derivoituvuutta jossakin pisteen ympäristössä.)

Esimerkki 5.4. Katsotaan esimerkin vuoksi, miten CR-yhtälöt toimivat tapauksessa, jonka osaamme suoraan laskea muuten. Tiedämme, että polynomit ovat analyyttisiä ja tuttu derivoimiskaava pätee. Harjoitellaan CR-yhtälöiden käyttöä laskemalla helppo lasku vaikeammin. Olkoon $f(z) = z^2 - 3\,z + 1$. Kirjoitetaan muotoon $f = u + i\,v$. $f(x + i\,y) = (x + i\,y)^2 - 3(x + i\,y) + 1 = x^2 - y^2 - 3\,x + 1 + i(2\,x\,y + 3\,y)$ (Laske ja tarkista!) Siis $u(x,y) = x^2 - y^2 - 3\,x + 1, \;\; v(x,y) = 2\boldsymbol{x}\,y - 3\,y$.

$u_x = 2\,x - 3, \quad v_y = 2\,x - 3$
$u_y = -2\,y, \quad v_x = 2\,y$

Siispä CR-yhtälöt ovat voimassa ja koska osittaisderiaavat ovat jatkuvia, sadaan CR-lauseesta uusi todistus tämän nimenomaisen polynomin analyyttisyydelle. Derivaatta saadaan kaavasta: $f'(z) = u_x(x,y) + i\,v_x(x,y) = 2\,x - 3 + i\,2\,y = 2(x + i\,y) - 3 = 2\,z - 3$. Niinpä vain saatiin kuin saatiinkin tuttu tulos. Eipä hullumpaa!

Esimerkki 5.5. Otetaan seuraavaksi hiukan työläämpi tapaus: $f(z) = z^{-2}$.

Aiemmin esitetyn mukaan tiedämme, että f on analyyttinen koko tasossa, josta origo on poistettu ja $f'(z) = -2z^{-3}$. (Osamäärän derivoimiskaavasta.)