Värähtelevä kieli, aaltoyhtälö

Luentoja to - pe 8-9.12.05 HA

Viite: KRE Ch 11.2

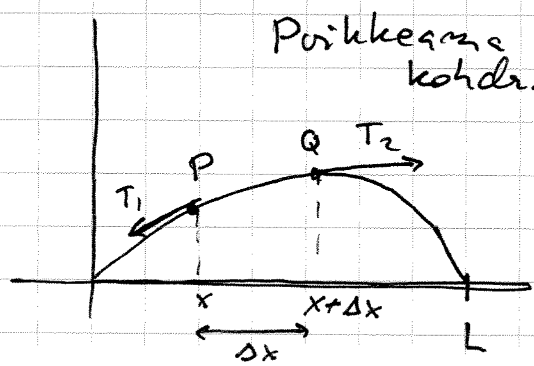
Päistään kiinnitetty soittimen (viulu, kitara..) kieli

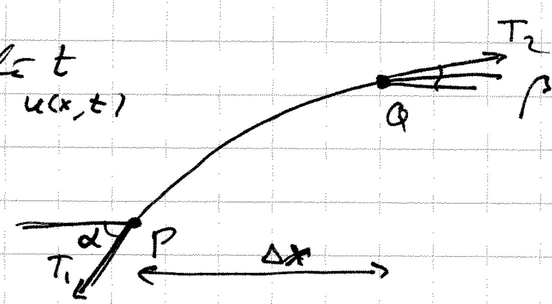
Oletuksia:

1) Homog. (massa / pituusyksikkö = vakio) Täysin joustava (ei taipumavastusta)

2) Kielen jännitys suuri ⇒ painovoimaa ei tarvitse ottaa huomioon.

3) Pienet poikkeamat ja kulmat, liike pystysuunnassa.





Jännitys on tangentin suuntainen, koska ei taipumavastusta.

Liike pystysuunnassa ⇒

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{vakio}$$

Pystysuunnassa vaikuttava voima:

$$-T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta$$

Poikkeamattoman kielen viivatiheys: σ.

Poikkeamattoman kielen osan massa: $\sigma \Delta x$.

<u>Huom!</u> Massa ei muutu, vaikka kieli venyy.

Newtonin II:n mukainen liikeyhtälö:

$$\sigma \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha .$$

Jaetaan $T = T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta$:llä,

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma \Delta x}{T} u_{tt} = \underbrace{\tan\beta}_{u_x(x+\Delta x, t)} - \underbrace{\tan\alpha}_{u_x(x,t)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sigma}{T} u_{tt} = \frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} u_{xx}(x,t) .$$

Rajalla päädytään siten yhtälöön:

$$(AY): \quad \boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}}, \quad \text{missä } c^2 = \frac{T}{\sigma}$$

AALTOYHTÄLÖ

Aaltoyhtälön ratkaiseminen

Reunaehdot: Molemmat päät kiinnitetty:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t .$$

Alkuehdot: Annettu alkupoikkeamafunktio $f(x)$ ja alkunopeusfunktio $g(x)$, ts.

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Yrite muuttujien erottelemiseksi

$u(x,t) = F(x)G(t)$. Sij. (AY):öön $\Rightarrow$

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{G''(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \quad \forall x,t.$$

$\Rightarrow$ Oltava sama vakio $= k$.

$$\Rightarrow \text{(X)} \quad F''(x) - kF(x) = 0$$

$$\text{(T)} \quad G''(t) - c^2 k\, G(t) = 0$$

RE:t $\quad u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \quad \forall t$

$\quad u(L,t) = F(L)G(t) = 0 \quad \forall t$

Nollaratkaisu $G(t) \equiv 0$ ei käy, joten on oltava $F(0) = 0$, $F(L) = 0$.

Jos $k = 0$, niin (X) $\Rightarrow F(x) = ax + b$

$\Rightarrow b = F(0) = 0$; $aL = F(L) = 0$

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow F(x) \equiv 0$

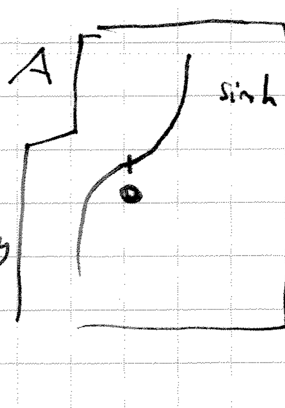
ei käy.

Jos $k = \mu^2 > 0$, niin $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$

$0 = F(0) = A + B \Rightarrow B = -A$

Siis $0 = F(L) = 2A \sinh L$

$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow F(x) \equiv 0$, ei käy



Ainoa mahdollisuus: $k = -p^2 < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (X) & F'' + p^2 F = 0 \\ (T) & G'' + c^2 p^2 G = 0 \end{cases}$$

(X)-yhtälö on sama kuin lämpöyhtälöllä:

$$F(x) = A\cos px + B\sin px$$

$$0 = F(0) = A$$

$$0 = F(L) = B\sin pL \Rightarrow p = \frac{n\pi}{L}.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(T) $G'' + c^2p^2 G = 0$

Merk. $\lambda_n = cp = \dfrac{cn\pi}{L}$

$$\Rightarrow G_n(t) = B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t$$

Siis funktiot

$$u_n(x,t) = (B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

toteuttavat (AY):n ja 0-reunaehdot.

<u>Alkuehdot</u>: Etsitään sarjaratkaisua:

(1) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

(AY) toteutuu (kun termeittäin derivointi oletetaan). Myös 0-(RE):t tot.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

VAATIMUS

Toteutuu valitsemalla ...→

B_n f:n sinisarjan kertoimeksi :

(2) $$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Toisaalta (AE):n varten derivoidaan termeittäin :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\lambda_n B_n \sin\lambda_n t + \lambda_n B_n^* \cos\lambda_n t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n B_n^* \sin\frac{n\pi x}{L} = \underline{g(x)}$$

VAATIMUS

Toteutuu valitsemalla $\lambda_n B_n^*$ $g(x)$:n sinisarjan kertoimeksi $\Longrightarrow$

(3) $$B_n^* = \frac{2}{\lambda_n L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$\lambda_n = \frac{nc\pi}{L} \qquad \frac{2}{\lambda_n L} = \frac{2}{nc\pi}$$

Saatiin siis ratkaisu (1), missä kertoimet B_n ja B_n^* saadaan kaavoista (2) ja (3).

Tässä tapauksessa (toisin kuin lämpö- ja Laplace) voidaan tästä edelleen johtaa muoto, jossa ei esiinny sarjaa.
Tästä muodosta voidaan heti tarkistaa, että se on tehtävän ratkaisu.
Termeittäin derivointi jää muodollisesti välivai-

heeksi, joita ei tarvitse perustella.

Ratkaisun kirjoittaminen "suljettuun muotoon"

Yksinkertaisuuden vuoksi ol: $g(x) = 0 \quad \forall x$

Jälleen kaava: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

Siis $\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{nc\pi t}{L} =$

$$\frac{1}{2}\left[\sin\frac{n\pi}{L}(x+ct) + \sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}(x+ct) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L}(x-ct),$$

Kyseessä on f:n Fourier-sinisarja laskettuna pisteissä $x+ct$ ja $x-ct$.

Sinisarja esittää f:n parittoman laajennuksen jatkettuna $2L$-jaksoiseksi. Merk. f^*.

Siis $u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f^*(x-ct) + f^*(x+ct)\right)$.

On helppoa osoittaa suoraan sijoittamalla (AY):öön, että se toteutuu, samoin RE:t ja AE.

Ratkaisu voidaan tulkita kahden vastakkaisiin suuntiin etenevän aallon keskiarvoksi. Tarkemmin luennoilla ja harjoituksissa.