K3/P3 välikoe 3, ratkaisut

15.12.2005 HA

Alustukset

```
> restart:
Warning, the name changecoords has been redefined
> with(LinearAlgebra):with(plots):
> read("/home/apiola/05muistitikku/ns05.mpl");
>
```

1.

```
> A:=<<0,1>|<1,0>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> (lambda,V):=Eigenvectors(A);
```

$$\lambda, V := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)

Seuraavat sijoitukset tehdään manuaalisesti siksi, että Maple muuttelee eri ajokerroilla järjestystä satunnaisesti, haluamme pitää saman järjestyksen•

```
> lambda[1] := 1; lambda[2] := -1;
```

$$\lambda_1 := 1$$

$$\lambda_2 := -1$$

```
> v1 := <1,1>: v2:=<-1,1>;
```

$$v2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Yleinen ratkaisu:

```
> C1:='C1': C2:='C2':
> y:=t->C1*exp(lambda[1]*t)*v1 + C2*exp(lambda[2]*t)*v2;
```

$$y := t \to C1\, e^{(\lambda_1 t)}\, v1 + C2\, e^{(\lambda_2 t)}\, v2$$

```
> 'y(t)'=y(t);
```

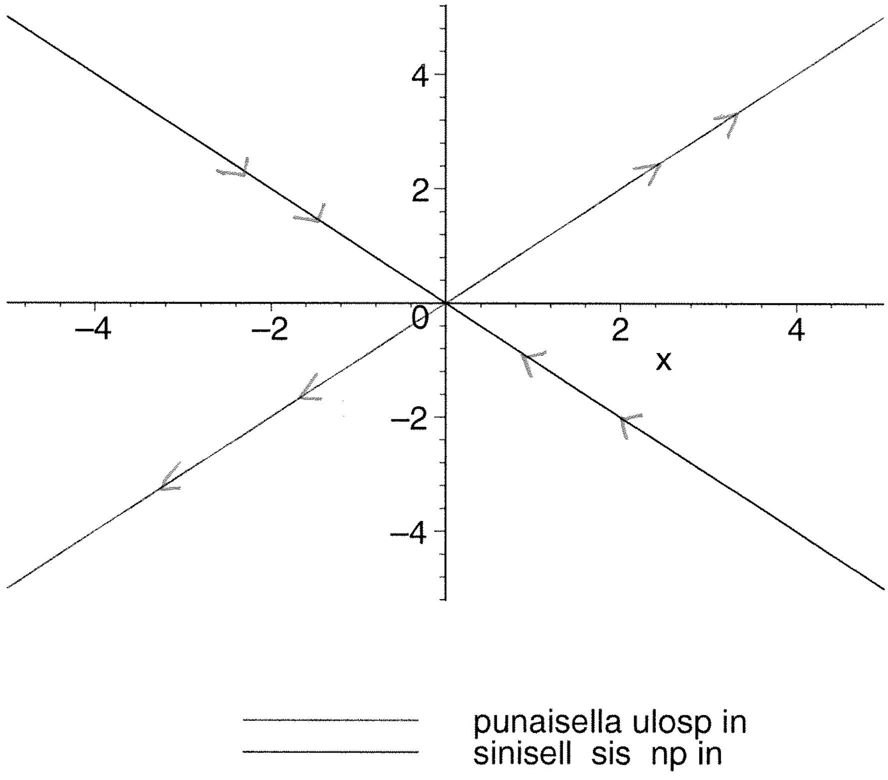
$$y(t) = C1\, e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C2\, e^{(-t)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

Jos C2=0, ollaan punaisella ominaisvektorilla [1,1] ja koska se kerrotaan e^t :llä, kuljetaan kohti äärettömyyttä (pois origosta).

Jos C1=0, ollaan sinisellä ominaisvektorilla [-1,1] ja koska se kerrotaan $e^{(-t)}$:llä, kuljetaan kohti origoa.

```
> plot([x,-x],x=-5..5,color=[red,blue],legend=["punaisella
  ulospäin","sinisellä
  sisäänpäin"]);plot([x,-x],x=-5..5,color=[red,blue]):kuva0:=%:
```



(c)

Alkuehdosta $y(0) = [0, \sqrt{2}]$ saadaan:

```
> y(0)=<0,sqrt(2)>;
```

$$C1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Josta C1 = C2 ja tämä arvo on $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

```
> C1:=1/sqrt(2); C2:=C1;
```

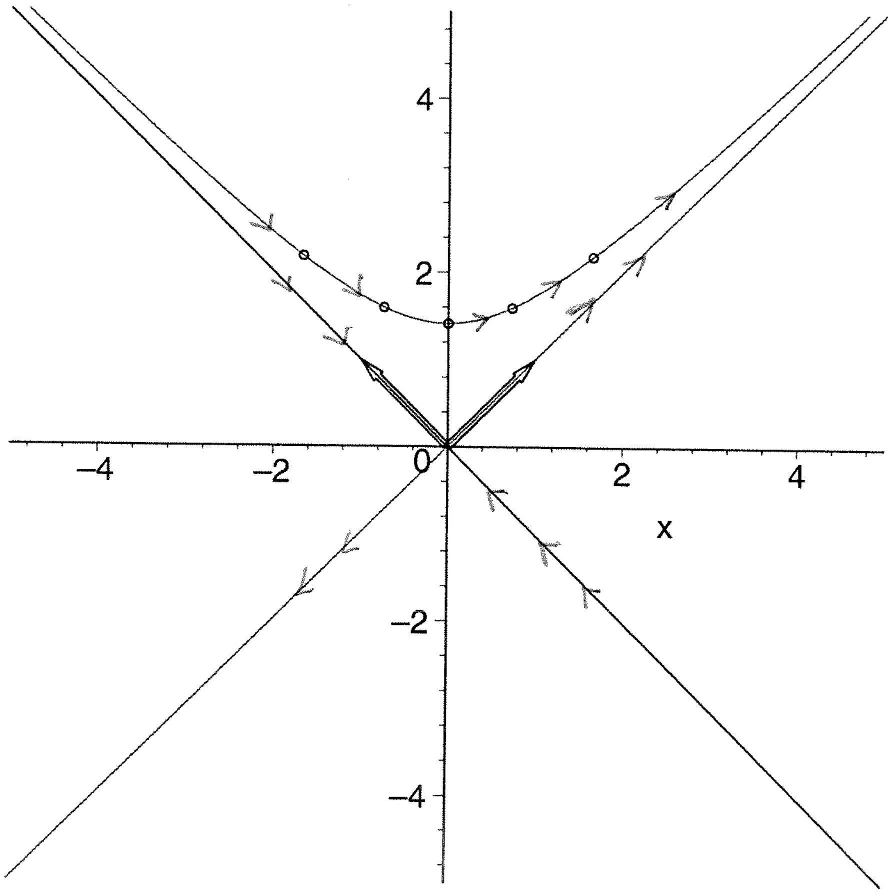
$C_1 = \; C2 := \frac{\sqrt{2}}{2}$

```
> y(t);
```

$$e^{t}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}+e^{(-t)}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

```
> evalm(y(t)):Transpose(Matrix(%));
```

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{t}\sqrt{2}-\frac{1}{2}e^{(-t)}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}e^{t}\sqrt{2}+\frac{1}{2}e^{(-t)}\sqrt{2}\end{bmatrix}$$



Tässä ominaisvektorit ja kysytty trajektori, punaisella on merkitty "kasinlasketut" pisteet. Punaista trajektoria pirtkin kuljetaan

vasemmalta oikealle, koska "sininen koordinaatti on muotoa $c\,e^{(-t)}$ ja "punainen" muotoa $c\,e^{t}$.

Tässä siis oli se työläämpi lasku. **Lyhyemmän tavan mukaan** oltaisiin voitu merkitä z1=exp(t) , jolloin z2=1/z1 ja oltaisiin siis

piirretty käyrä $z2 = \frac{1}{z1}$ koordinaatistoon, jonka kantavektorit ovat $\frac{[1, 1]}{\sqrt{2}}$ ja $\frac{[-1, 1]}{\sqrt{2}}$.

2) (a) $\theta'' + k\sin\theta = 0$, $k = 1$.

Merk. $x = \theta$, $y = \theta'$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases}$$

KRP: $(0,0)$ [on varmasti KRP: $\begin{bmatrix} 0 \\ -\sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$]

Jacobin matr. $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{bmatrix}$, $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Linearisoitu systeemi: $\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J_0 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

(b) Tarvitsemme u:ta ja v:tä muihin tarkoituksiin, joten merkitkäämme linearisoitua systeemiä:

$$\vec{y}' = J_0 \vec{y} \qquad \left(\vec{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

J_0:n om. arvot: $+\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

Arvoa $\lambda = i$ vastaava om. vekt.:

$(0 - i)x_1 + 1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = i x_1$;

$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \mathrm{Re}\,\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\vec{v} = \mathrm{Im}\,\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

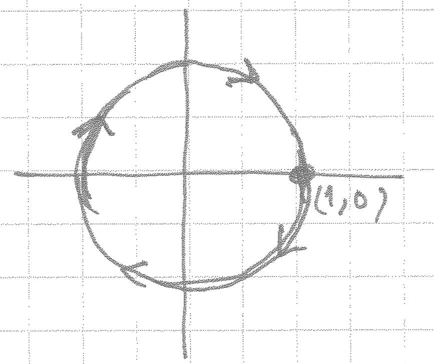
Yl. ratk. $\vec{y}(t) = e^{\alpha t} [\vec{u} \,|\, \vec{v}] \begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$\lambda = i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1$.

Siis $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$$

Jos siis otamme pisteen $\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$ aivan tavallisessa koordinaatistossa, niin $\vec{y}(t)$ saadaan kiertämällä t kulmayksikköä myötäpäivään, jos $t > 0$.



Siis pisteen $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ kautta kulkeva trajektori on yksikköympyrä (myötäpäivään)

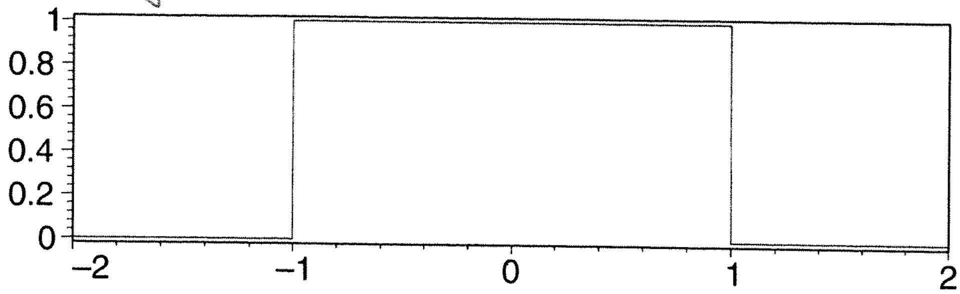
Voidaan toki tehdä loppu vielä "mekaanisemmin":

$$\vec{y}(0) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

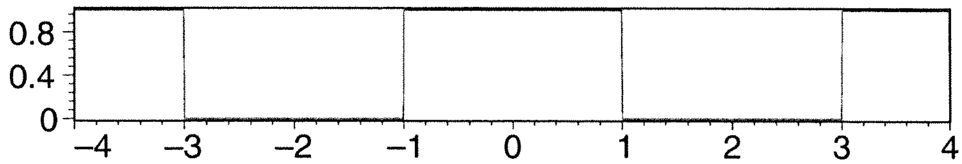
$\Longrightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 0 \Longrightarrow$

$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}$, ompi ympyränä, ja kun t kasvaa 0:sta, niin $-\sin t$ pienenee 0:sta ..., eli mennään myötäpäivään.

3) Parill. jatke



Parillisen jaksoll. jatke



Koska f on parillinen, sen Fourier-sarjassa on pelkkiä kosinitermejä (myös vakio a0 lasketaan kosinitermiksi).
Integrointi suoritetaan mukavimmin ottamalla 2 kertaa integraali 0:sta L:ään, eli annetut an-kaavat kerrotaan kahdella ja alarajaksi otetaan 0.
Kertoimet ovat siis $\frac{2L}{2} = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$ (a0) ja $\frac{2}{L} = \frac{2}{2} = 1$ (an, n>0)

Käsin integroiden lasketaan näin:

```
> a0:=1/2*Int(1,x=0..1);a0:=value(a0);
```

$$a0 := \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dx$$

$$a0 := \frac{1}{2}$$

```
> an:=Int(1*cos(n*Pi*x/2),x=0..1);an:=value(an);
```

$$an := \int_0^1 \cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{2}\right) dx$$

$$an := \frac{2\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)}{n\,\pi}$$

Parillisilla n:n arvoilla saadaan 0 ja parittomilla + tai - $\frac{2}{n\,\pi}$

```
> seq(an,n=1..7);
```

$$\frac{2}{\pi}, 0, -\frac{2}{3\,\pi}, 0, \frac{2}{5\,\pi}, 0, -\frac{2}{7\,\pi}$$

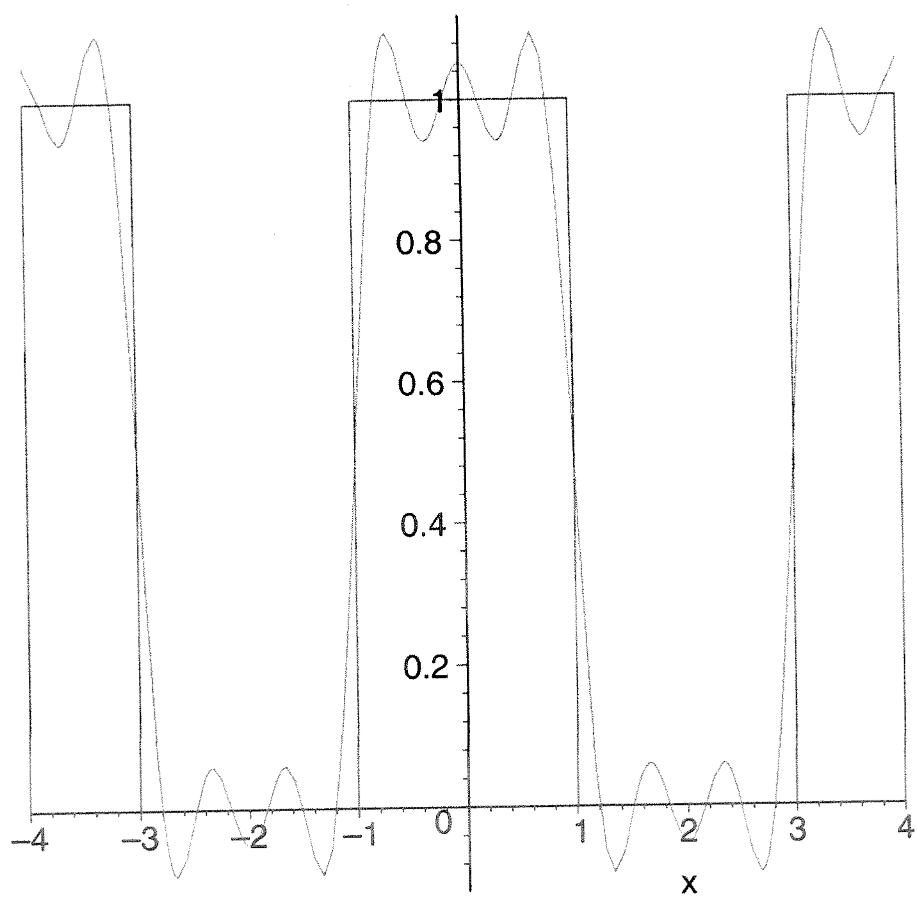
```
> sarja:=a0+Sum(an*cos(n*Pi*x/2),n=1..infinity);
```

$$sarja := \frac{1}{2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\,\pi\,x}{2}\right)}{n\,\pi}\right)\right)$$

```
> osasumma:=(x,N)->a0+add(an*cos(n*Pi*x/2),n=1..N):
> osasumma(x,5);
```

$$\frac{1}{2} + \frac{2\cos\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)}{\pi} - \frac{2}{3}\,\frac{\cos\left(\frac{3\,\pi\,x}{2}\right)}{\pi} + \frac{2}{5}\,\frac{\cos\left(\frac{5\,\pi\,x}{2}\right)}{\pi}$$

```
> plot([Jfe(x),osasumma(x,5)],x=-4..4);
```



4) $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t},$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

Alkuehto: $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$.

Jotta (AE) toteutuisi, on valittava B_n = $f(x)$:n (2L-jaksoisen) sinisarjan kertoimeksi $b_n(f)$.

Ts. $$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Nyt $L = 10$, $f(x) = 100$

$$\Rightarrow B_n = \frac{1}{5}\int_0^{10} 100\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{200}{n\pi}\left(1 - \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\right) = \begin{cases} \frac{400}{n\pi}, & n \text{ pariton} \\ 0, & n \text{ parill.} \end{cases}$$

Siis $u(x,t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{10} e^{-\lambda_n^2 t}$,

missä $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n^2 = \frac{1.14 \cdot \pi^2}{100} n^2$

$$\approx 0.1125 n^2$$

b) 1. termi:

$$u(x,t) \approx \frac{400}{\pi} \sin \frac{\pi x}{10} e^{-\lambda_1^2 t}$$

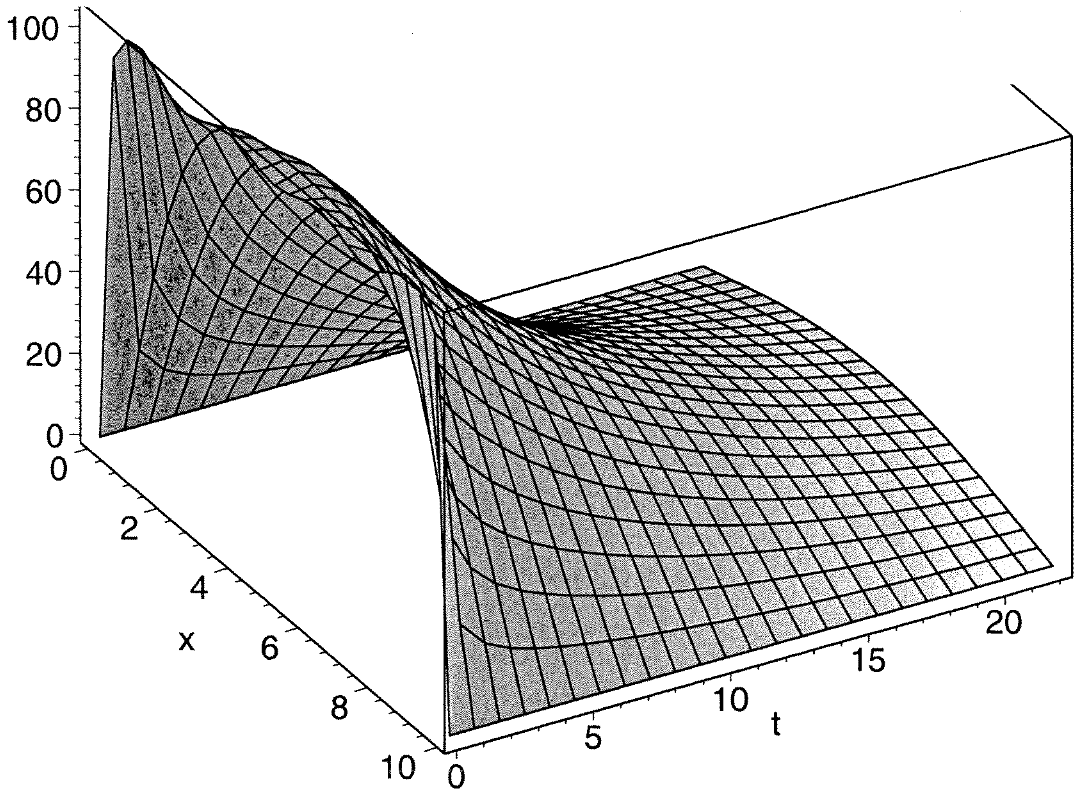
$u(x,t) = 10$ pisteessä $x = 5 \Rightarrow$

$$\frac{400}{\pi} \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} e^{-\lambda_1^2 t} = 10$$

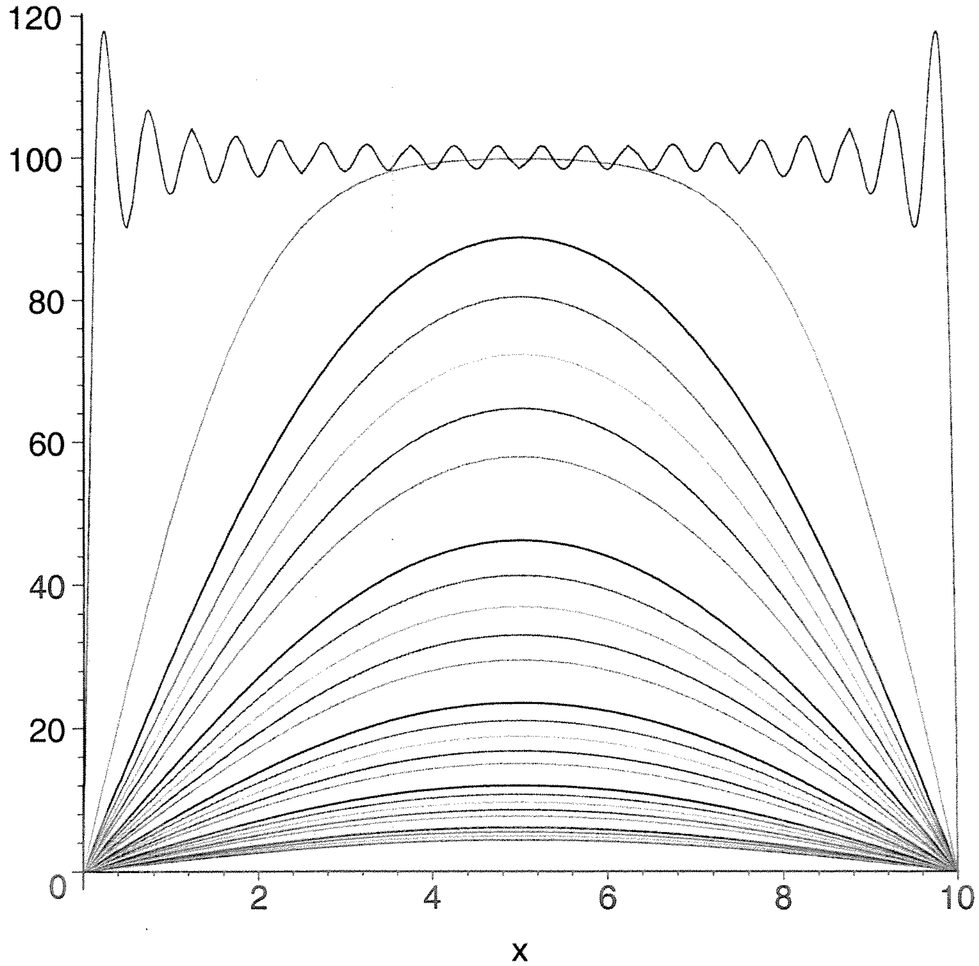
$$\Rightarrow e^{-\lambda_1^2 t} = \frac{\pi}{40}$$

$$\Rightarrow -\lambda_1^2 t = \ln \frac{\pi}{40} \Rightarrow$$

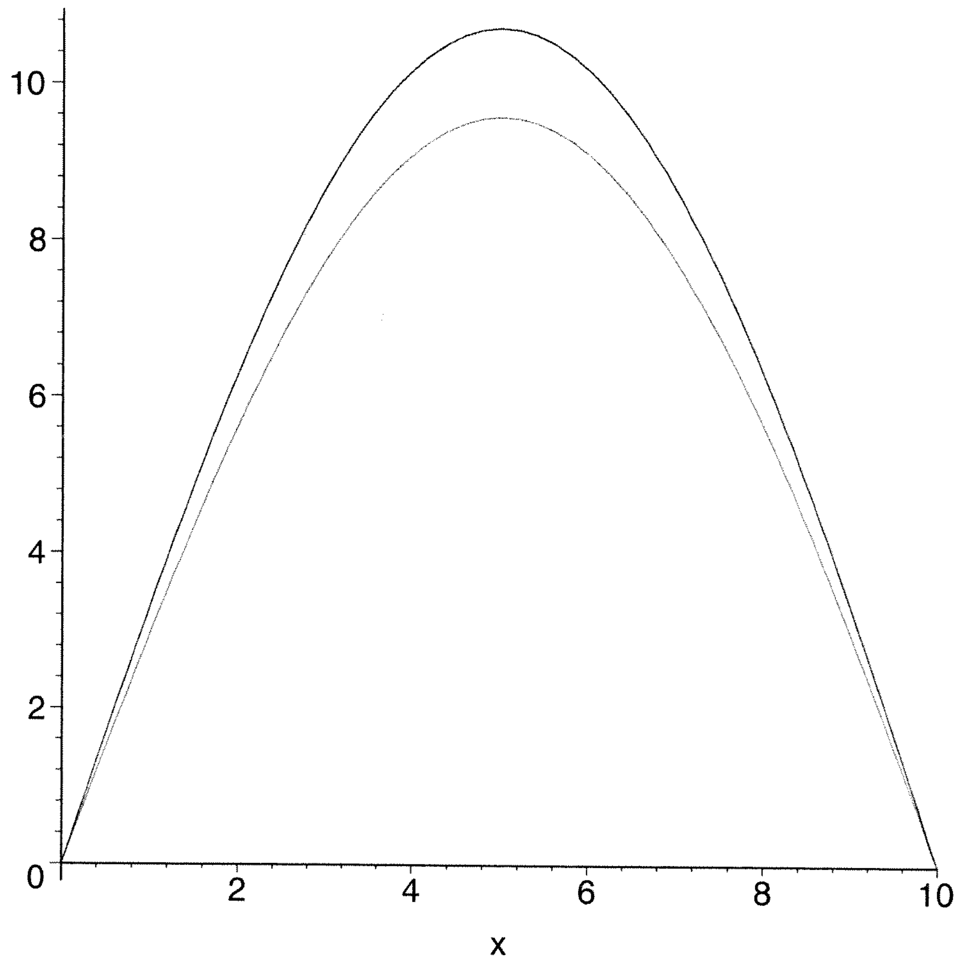
$$t = \frac{-\ln \frac{\pi}{40}}{\lambda_1^2} \approx \underline{22.6 \text{ s}}$$




```
> plot([seq(usum(x,t,40),t=[seq(i,i=0..30)])],x=0..10);
```



```
> plot([seq(usum(x,t,40),t=[seq(i,i=22..23)])],x=0..10);
```



Varsin tarkka arvio saatiin ajalle 1. termiä käyttäen.

```
>
```