Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssit K3/P3

Apiola/Bingham

1. välikoe 17.10. 2005

Muistathan kirjoittaa nimesi ja muut vaadittavat jokaiseen vastauspaperiin!

Sallittu: funktiolaskin

1. (a) Määritä kaikki arvot $\log(-1+i\sqrt{3})$.
   (b) Piirrä z-tason alue $\ln\frac{1}{2} < x < 0,\ \ -\frac{\pi}{2} < y < \pi$ ja sen kuva kuvauksessa $w = e^z$.
2. (a) Kirjoita $\sinh z$ muotoon $u(x,y) + i\,v(x,y)$ (u ja v reaaliarvoisia), $z = x + i\,y$. (Käytä sinh $-$ funktion määritelmää, tarkoitus **ei ole** käyttää yhteenlaskukaavaa.)
   (b) Osoita *Cauchy–Riemannin* yhtälöiden (ja lisäehdon) avulla, että $\sinh z$ on analyyttinen koko kompleksitasossa.
3. Laske funktion f_1 Laplace muunnos ja funktion F_2 käänteismuunnos, kun

$$f_1(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

   ja $F_2(s) = \frac{2\,s+7}{s^2+2\,s+5}$.
4. Ratkaise Laplace-muunnosta käyttäen alkuarvotehtävä

$$y'' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \text{ missä } r(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

Pari hassua kaavaa

Seuraavassa z tarkoittaa kompleksilukua ja x reaalilukua.
$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$
$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f*g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g*f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos\omega t$	$\sin\omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Osamurtokehitelmät

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s-a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä s^2+bs+c, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$